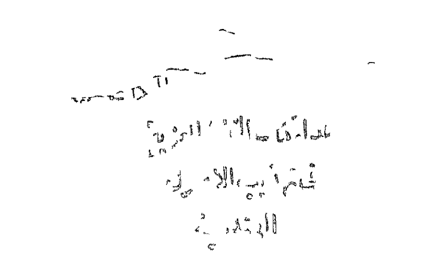
تحرير [illegible]

الأصول الهندسية

٢١.٣٥







على غير أنه لم يذكر البرهان إلا أنه المعدلات بالمراد بالثلاث
التي يشار إليها أن الحصر كان في أصول الهندسة يكون عباراته على
السهولة موضحة ويكون مهذب المعاني جيد الترتيب
القاصي والداني ويكون واسطة في حصول معالم الهندسة العالية
هذا بناء على ترتيبه بالهندسة الحديثة قامت أمر به بالامتثال
واحتفلت به كل الاحتفال واعتنيت بجمع هذا الكتاب ليكون عمدة
لذوي الألباب وانتخبته من كتب شتى منها كتاب إقليدس الشهير
وكتاب لاكروا صاحب الفهم السديد وكتاب الشهير براكور وكتاب
المهندس ولسن صاحب الفهم الأنور وكتاب الشهير أويو والشهير دولت
ومنثى وكتاب الشهير بلاندر البروف الذي تآليفه بالسلامة
موصوف وكتاب الشهير بلانشي وغير ذلك من المؤلفات الفرنساوية
المفيدة ذوات العقود الفريدة وكان عمدتي في هذا التأليف كتاب
في أصول الهندسة جامع لما شتت بعضه كل مهندس من القدماء وأسس
بقواعدهم تأليف هذا الكتاب الأخير المهندس لجاندر الفرنساوي الشهير
فيلسوف زمانه وفريد عصره وأوانه وذلك لما اشتمل عليه من كثرة
المعاني وقلة الألفاظ والمباني مع ما اشتهر به من حسن التأدية
وسهولة الأسلوب الغريب ولذلك طبع طبعات بلغت أربعة عشر مرة
بزيادة التحسين والتهذيب في كل مرة وكانت الطبعة الرابعة عشر منه
في سنة ١٨٤٥ مسيحية الموافقة لسنة ١٢٦١ هجرية فاعتمدت عليه من كل باب
أحسن خطاب وحذفت ما لا حاجة إليه ولا معول في المباحث عليه
ورتبته ترتيبا يسر الخاطر ويروق النواظر وترجمت هذا الكتاب النافع
والمسافر مبحث الخطوط المتوازية ومبحث تماس الدوائر
واجتهدت في تسهيل براهينه على قدر الإمكان وأمعنت النظر فيه كل
الإمعان وأضفت المقالة الثالثة ذيلا في طريقة ضرورية في العلوم النظرية
والعملية وفي تطبيق العلوم الرياضية على العلوم الطبيعية لاسيما في الخواص

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله مبدع المخلوقات العالم بما كان وما هو كائن وما هو آت مخترع
الاشياء في غاية الاتقان ومبرزها من خفاء العدم الى ظهور العيان جعلها
في غاية الاحكام بهرت العقول بما فيها من بديع الانتظام ان في ذلك
لآيات لاولي الالباب وارشادا من اهل الخطا الى منار الصواب والصلاة
والسلام على محيط دائرة الوجود ومطلع شمس الحق والجود ضبط
نقطة قلم الالهيات ومنبع الحكم والرياضيات محمد المعروف باشكال
الفضائل المؤيد باوضح البراهين والدلائل وعلى آله اولي القوة واليقين
المرهبين عن كل عرض بشين ثم الدعاء لحضرة صاحب الكرم والرأي
السديد مولى الديار المصرية الصدر السعيد مركز دائرة الاقبال ومن
تقلب على سرير الجهاد والجلال القائم بمنشور بسطة العدل في تلك
الديار التي علت بهمته العلية القصوى اعني أيد الله احكامه وثبت
على صراط الصدارة اقدامه وبعد فيقول الفقير الى رحمة ربه العبد المهدي



(في الاصول الهندسية)

المقالة الاولى في خواص الخطوط المستقيمة ومساوي المثلثات وخواص الشكل الرباعي

(حدود)

(حد ١) الجسم ماله ابعاد ثلاثة هي الطول والعرض والعمق اي السمك

(حد ٢) الحيز هو الفراغ الذي يشغله الجسم

(حد ٣) سطح الجسم هو الحد الفارق بينه وبين الاجسام الملاصقة وبعبارة اخرى ماله طول وعرض فقط

(حد ٤) الخط ملتقى سطحين وبعبارة اخرى هو طول فقط

(حد ٥) النقطة ملتقى خطين

(حد ٦) كل من الجسم والسطح والخط يعتبر مجردا عن المادة

(حد ٧) يطلق اسم الشكل على الجسم وعلى السطح وعلى الخط

(حد ٨) موضوع الهندسة الاشكال من حيث مساحاتها وابعادها ومعرفة خواصها

(حد ٩) الخط المستقيم اقرب بعد بين نقطتين مثاله الخط ا ب (الشكل ١)

(حد ١٠) الخط المنكسر خط مركب من خطوط مستقيمة ليست على استقامة واحدة مثاله الخط ا ج د ب من (الشكل ١)

(حد ١١) الخط المنحني ما ليس مستقيما ولا منكسرا مثاله الخط ا هـ ب (الشكل ١)

(حد ١٢) المستوي كل سطح اذا كان الخط المستقيم عليه في سائر جهاته وبعبارة اخرى هو سطح اذا اخذ فيه نقطتان اي كانتا ووصل بينهما بمستقيم انطبق هذا المستقيم عليه انطباقا تاما

(حد ١٣) السطح المنحني ما ليس مستويا ولا مركبا من سطوح مستوية

(حد ١٤) الزاوية مساحة واقعة بين مستقيمين متقاطعين وبعبارة

اليه [illegible] للاشعة الصورية واضفت الى عمليات هذه المقالة تكميل المعنى
دعاوى عملية أخرى عن الادب [illegible] واضفت الى ذلك ما جاد به فكرى من
الامور [illegible] ذوات المواقع العديدة وشرحتها عقب الدعاوى العملية
المتعلقة بالمقالة الثالثة من الاصول الهندسية حتى يتوصل بها الى فهم
ما رام فى هذا الغرض البعيد المرام وجعلت للمقالة الرابعة الى [illegible]
[illegible] هذه المقالة الثالثة تابعة لمقالات [illegible] على [illegible]
مشروح فى الدعاوى المشهورة واحدهما مشروح عقب المقالة الرابعة
المذكورة وجعلت كلما ينسب الى كل مقالة من الاشكال مفردا عنها
عند [illegible] الدلائل والاشكال واجتهدت فى تحرير ألفاظه ومبانيه
وتهذيب عباراته ومعانيه وكنت اعرض كل ما ترجمته أولا فأولا وجعلته
ومراجعته على حضرة الشيخ ابراهيم الدسوقى صاحب الفهم الثاقب والاجتهاد
[illegible] بالمراد [illegible] الايام [illegible]
صاحب الدولة والنعم [illegible] حماه [illegible] الله ملكه الى [illegible]
والسرور [illegible] الختام [illegible]
فى [illegible] الله الموفق للصواب [illegible]

زاويتين قائمتين

(حد ١٩) الزاويتان المتتاميتان هما زاويتان مجموعهما يساوي زاوية قائمة

(حد ٢٠) الخطان المتوازيان خطان مستقيمان في مستو واحد اذا امتدا لا يلتقيان اصلا مثال ذلك أ ب و حـ د س (الشكل ٥)

(حد ٢١) الشكل المستوي سطح مستو محدد من جميع جهاته بخطوط لكن اذا كانت تلك الخطوط مستقيمة فالمساحة المحددة بتلك الخطوط تسمى شكلا مستقيم الخطوط او مستقيم الاضلاع او مضلعا مستويا ومجملة الخطوط المذكورة تكون محيط الشكل أو اطرافه كما في (الشكل ٦)

(حد ٢٢) ابسط الاشكال المستقيمة الاضلاع ما له ثلاثة اضلاع ويسمى مثلثا وما له اربعة اضلاع يسمى ذا اربعة اضلاع أو شكلا رباعيا وما له خمسة اضلاع يسمى مخمسا أو شكلا خماسيا وما له ستة يسمى مسدسا أو شكلا سداسيا وهكذا

(حد ٢٣) المثلث المتساوي الاضلاع ما كانت اضلاعه متساوية كما في (الشكل ٧)

والمثلث المتساوي الساقين ما كان فيه ضلعان متساويان فقط كما في (الشكل ٨)

والمثلث المختلف الاضلاع ما كانت اضلاعه مختلفة كما في (شكل ٩)

(حد ٢٤) المثلث القائم الزاوية ما كانت احدى زواياه قائمة والضلع المقابل لها يسمى وترها فالمثلث أ ب حـ القائم الزاوية أ يسمى مثلثا قائم الزاوية والضلع ب حـ يسمى وتر القائمة كما في (الشكل ١٠)

(حد ٢٥) الشكل الرباعي انواع وهي المتوازي الاضلاع والمعين والمستطيل والمربع والمنحرف وشبه المنحرف اما المتوازي الاضلاع فهو ما كانت اضلاعه المتقابلة متوازية سواء كانت اضلاعه المتجاورة متساوية او غير متساوية وسواء كانت زواياه قائمة او غير قائمة كما في (الشكل ١٣)

واما المعين فهو متوازي الاضلاع اضلاعه متساوية وزواياه غير قائمة كما في

اخرى هي الانفراج الكائن بين مستقيمين متقاطعين ونقطة التقاطع تسمى رأس الزاوية والمستقيمان يسميان ضلعاها مثالها الزاوية ب ا ح المرسومة في (الشكل ٢) فالنقطة ا تسمى رأس الزاوية وكل من المستقيمين ب ا و ا ح يسمى ضلعها والزاوية تميز تارة بحرف الرأس وتارة ثلاثة حروف بشرط ان يذكر حرف الرأس في الوسط فان كانت مفرده كفى لتمييزها حرف الرأس وان كانت مركبة من زاويتين فاكثر وجب تمييزها بالحروف الثلاثة

والزاويتان المتساويتان زاويتان اذا وضعت احداهما على الاخرى انطبقت عليها انطباقا كليا

اذا احتوت زاوية مثل ا على زاويتين كلتاهما مساوية لزاوية اخرى كالزاوية ى يقال ان الزاوية ا ضعف الزاوية ى فاذا احتوت على ثلاث زوايا كذلك يقال ان الزاوية ا ثلاثة امثال الزاوية ى وهكذا فالزوايا قابلة للمقارنة بعضها كبقية المقادير

(حد ١٥) الزاوية القائمة هي احدى الزاويتين المتجاورتين المتساويتين الحادثتين من تلاقي مستقيم بآخر مثالها الزاوية ب ا ح أو ب ا ى كما في (الشكل ٣)

والزاوية المنفرجة هي ما كانت اكبر من الزاوية القائمة مثالها الزاوية ى ه و من (الشكل ٤)

والزاوية الحادة هي ما كانت اصغر من الزاوية القائمة مثالها الزاوية ب ا ح من (الشكل ٤)

(حد ١٦) المستقيم العمود على مستقيم هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين متساويتين مثاله المستقيم ا ب من (الشكل ٣)

(حد ١٧) المستقيم المائل على مستقيم هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين غير متساويتين مثاله المستقيم ح د من (الشكل ١٧)

(حد ١٨) الزاويتان المتممتان لبعضهما هما زاويتان مجموعهما يساوي

المقالات الاربع الاول يبحث فيها عن الاشكال المستويه وعن الخطوط المرسومة على السطح المستوى،

(بيان الاصطلاحات والعلامات المشتمله عليها هذه الاصول)

ضروريات العلم قضايا بديهية بنفسها اى التى لا تحتاج الى برهان

الدعوى النظرية هى القضية التى لا تتضح حقيقتها الا بواسطة البرهان العقلى

الدعوى العملية هى المسئله التى يراد حلها بالعمل

الفائدة هى القضية المعينة على اثبات دعوى نظرية او مسئلة

القضية اسم يطلق على الدعوى النظرية والعملية والفائدة

النتيجة هى الثمرة التى تظهر من قضية او جملة قضايا تقدمت

التنبيه ما يفهم منه فائدة الدعوى التى تقدمت وارتباطها بغيرها ارتباطا

الفروض هى الموضوعات التى تعرض فى تعريف قضية او فى اثناء البرهان

(العلامات)

هذه العلامة = تسمى علامة التساوى فكتابة ا = ب معناها ا تساوى ب

ولبيان ان مقدار ا اصغر من مقدار ب نكتب ا < ب

ولبيان ان ا اكبر من ب يكتب ا > ب

وهذه العلامة + هى علامة الزيادة وتدل على الجمع وهذه العلامة − هى علامة النقصان وتدل على الطرح فكتابة ا + ب تدل على حاصل جمع كميتى ا و ب وكتابة ا − ب تدل على فرقهما اى على الباقى من طرح الكمية ب من الكمية ا وكتابة ا − ب + ح او ا + ح − ب تدل على انه ينبغى جمع ا و ح وطرح ب من حاصل جمعهما

وهذه العلامة × تدل على الضرب فكتابة ا × ب تدل على الحاصل

...

(الشكل ١٠)

واما المستطيل فهو متوازي اضلاع زواياه قائمة واضلاعه المجاورة مختلفة كما في (الشكل ١٢)

واما المربع فهو متوازي اضلاع اضلاعه متساوية وزواياه قائمة كما في (الشكل ١١)

واما المنحرف فهو شكل رباعي اضلاعه المتقابلة غير متوازية

واما شبه المنحرف فهو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان فقط كما في (الشكل ٥ ل)

(حد ٢٦) قطر الشكل خط مستقيم موصول من رأسي زاويتين غير متجاورتين من زواياه كالخط ا ح من (الشكل ٤٢)

(حد ٢٧) كثير الاضلاع ان كانت اضلاعه متساوية يسمى متساوي الاضلاع وان كانت زواياه متساوية يسمى متساوي الزوايا

(حد ٢٨) الشكلان المتساويا الاضلاع شكلان اضلاعهما المتناظرة متساوية وموضوعة على سطح واحد اي انما اذا تبعنا محيطهما في جهة واحدة شاهدنا الضلع الاول من احدهما مساويا للاول من الآخر والثاني من الاول مساويا للثاني من الآخر والثالث للثالث وهكذا

والشكلان المتساويا الزوايا شكلان زواياهما المتناظرة متساوية وموضوعة على ترتيب واحد اي ان الزاوية الاولى من احدهما مساوية للاولى من الآخر والثانية من الاول مساوية للثانية من الآخر والثالثة للثالثة وهكذا

والاضلاع المتساوية تسمى بالاضلاع المتناظرة والزوايا المتساوية تسمى بالزوايا المتناظرة

(حد ٢٩) كثير الاضلاع المحدب شكل موضوع تمامه في جهة واحدة من امتداد اي ضلع من اضلاعه

ومحيط اي مضلع محدب لا يمكن ان يقطعه اي مستقيم في اكثر من نقطتين

(٧) الاشياء المتساوية اذا طرح منها اشياء متساوية كانت البواقي متساوية

(٨) الاشياء المتساوية اذا ضربت في اشياء متساوية كانت الحواصل متساوية

(٩) الاشياء المتساوية اذا قسمت على اشياء متساوية كانت الخوارج متساوية

(١٠) الاشياء المختلفة اذا اضيف اليها اشياء متساوية كانت المجاميع غير متساوية

(١١) الاشياء المختلفة اذا طرح منها اشياء متساوية كانت البواقي غير متساوية

(١٢) الاشياء المختلفة اذا ضربت في اشياء متساوية كانت الحواصل مختلفة

(١٣) الاشياء المختلفة اذا قسمت على اشياء متساوية كانت الخوارج غير متساوية

(١٤) الاشياء المختلفة اذا اضيف لها اشياء مختلفة الاصغر للاصغر والاكبر للاكبر كانت الحواصل مختلفة اي يكون مجموع الاشياء الصغرى اصغر من مجموع الاشياء الكبرى

(١٥) اذا رسم خط مستقيم غير محدود في سطح مستو وكان بامتداد الخط في جهتين لا ينتهي من هذا المستقيم خط بالدلالة في نقطة واحده

- (الدعوى الاولى النظريه شكل ٥).

كل مستقيمين اشتركا في نقطتين يتحدان ويصيران مستقيما واحدا اي اذا اشترك مستقيمان في نقطتين مثل ا و ب فانهما يصيران مستقيما واحدا

وبرهانه ان يقال حيث لا يمكن رسم مستقيمين بين النقطتين ا و ب يتحد الخطان من النقطة ا الى النقطة ب فان قيل انهما قد لا يصيران

من ضرب ا في ب وقد تستعمل نقطة تدل على علامة الضرب هذه ×
فكتابة ا × ب ككتابة ا ب وقد يكتب الحاصل المذكور ايضا
بدون علامة متوسطة بين المضروب والمضروب فيه هكذا ا ب
وكتابة ا × (ب + ح − ى) تدل على حاصل ضرب ا في كمية ب
+ ح − ى واذا اريد بيان حاصل ضرب ا + ب − ى في ا − ب
+ ح يكتب هكذا
(ا + ب) (ا − ب + ح) فكلما حصر بين قوسين يعتبر كمية
واحدة فقط

لبيان ان الخط ا ب كرر ثلاث مرات يكتب ٣ ا ب ولبيان اخذ نصف
زاوية ب يكتب ½ ب ويستدل على مربع الخط ا ب بهذه العلامة
ا ب² وعلى مكعبه بهذه ا ب³ ويسمى مربع الخط ومكعبه في عرفه
هذه العلامة √ تدل على استخراج الجذر مثلاً كتابة √٩ تدل على ان
المطلوب جذر المربع ٩ وهو ٣ وكتابة √ب × ح تدل على ان
المطلوب جذر حاصل ضرب ب × ح اي على الوسط المتناسب الهندسي
بين ب و ح

﴿ ضروريات العلم ﴾

(١) المقداران المساويان لمقدار واحد متساويان
(٢) الكل اعظم من جزئه
(٣) الكل يساوي مجموع اجزائه
(٤) لا يمكن وصل خطين مستقيمين بين نقطتين
(٥) الشيئان يكونان متساويين اذا امكن انطباق احدهما على الآخر
انطباقاً تاماً سواء كان هذان الشيئان خطين او سطحين او حجمين
(٦) الاشياء المتساوية اذا اضيف لها اشياء متساوية كانت الحواصل
متساوية

(٧)

على المستقيم اب فاذا لا يمكن ان يقام من نقطة واحدة من مستقيم
عمودان عليه في جهة واحدة منه

ويتبع من هذه الدعوى ان الزوايا القائمة متساوية
فاذا كان المستقيم حد عمودا على المستقيم اب والمستقيم ى ط
عمودا على المستقيم هر تكون القائمة احد مساوية للقائمة الاخرى
ه ح ط

(برهانه) ان يؤخذ بعد اح = هح و حب = حر ثم نرسم
الزاوية هح ط على الزاوية احد بان ينطبق الضلع هح على الضلع
اح فتقع النقطة ه على النقطة ا والنقطة ح على النقطة ح
ويقع العمود ح ط على العمود حد لانه لا يمكن اقامة عمودين على
مستقيم من نقطة واحدة في جهة واحدة منه فحينئذ تنطبق الزاوية هح ط
على الزاوية احد وتساويها فقد ثبت ان الزوايا القائمة متساوية

* (تنبيه) *

ليس المقصود من هذه الجملة اثبات ان الزاوية احد تساوي الزاوية المجاورة
لها دحب ولا ان الزاوية هح ط تساوي الزاوية طحر المجاورة
لها لان الزاوية احد = دحب بمقتضى تعريف الزاوية القائمة ولان
الزاوية هح ط = طحر بمقتضى التعريف المذكور
بل المقصود اثبات ان اي زاوية قائمة من شكل تساوي القائمة من آخر

* (الدعوى الثالثة المطلوبة شكل ١٧) *

مجموع الزاويتين المجاورتين الحادثتين من تلاقي مستقيم بآخر يساوي زاويتين
قائمتين

فاذا تلاقى مستقيم مثل حد بمستقيم آخر مثل اب فمجموع الزاويتين
احد و دحب يساوي قائمتين اعني ان احد + دحب = قائمتين
(برهانه) ان يقام من النقطة ح عمود حه على اب فيصير مجموع
الزاويتين دحا و دحب مركبا من ثلاث زوايا هي

مستقيما واحدا اذ امتدا ان يصير احدهما في الاتجاه ب س والآخر في الاتجاه ب ى يقال لو دوّر الخط ا ب ى حول النقطة ا حتى وقعت احدى نقطه كالنقطة ه على احدى نقط الخط ا ب س كالنقطة ب لانتقلت النقطة ب عن وضعها الاول وصارت في نقطة كالنقطة ح وانتقل الخط ا ب ه ى في ا ح ب ع فيلزم عليه امكان وصل مستقيمين بين النقطتين ا و ب وهو محال •

«(الدعوى الثانية الطريقة شكل ١٦)»

كل مستقيم يمكن ان يقام من نقطة منه عمود عليه ولا يمكن ان يقام منها عمودان عليه في جهة واحدة

برهان القضية الاولى ان يقال ليكن ا ب مستقيما ولتكن ح نقطة منه ولنا احدث نقطة خارجة عنه مثل ى ثم وصل المستقيم ى ح لحدثت زاويتان متجاورتان ى ح ا ى ح ب فان كانتا متساويتين كان المستقيم ى ح هو العمود المطلوب وان كانتا غير متساويتين بان كانت الزاوية ى ح ا اكبر من الزاوية ى ح ب فلتصور في الزاوية ى ح ا زاوية ه ح ا = ى ح ب وان الزاوية ى ح ه مقسومة الى جزئين متساويين بمستقيم ح ف فهذا المستقيم يكون عمودا على ا ب اعني ان الزاوية ف ح ا = ف ح ب لان الزاوية ه ح ا = ى ح ب عملا والزاوية ه ح ف = ى ح ف فيكون ه ح ا + ه ح ف = ى ح ب + ى ح ف اى ف ح ا = ف ح ب

وبرهان القضية الثانية ان يفرض ان المستقيم ح ى عمود على المستقيم ا ب ثم يقال ان اى مستقيم مخرج من النقطة ح كالمستقيم ح ه في الجهة التي فيها العمود ح ى يصنع مع المستقيم ا ب زاويتين متجاورتين غير متساويتين لان الزاوية ا ح ى = ب ح ى بالفرض والزاوية ا ح ه > ا ح ى او > ب ح ى والزاوية ب ح ى > ب ح ه فتكون الزاوية ا ح ه > ب ح ه اى ان المستقيم ح ه ليس عمودا

على

مثلا فيكون ا د ى + ى د ك = قائمتين
والمفروض ان ا د ى + ى د ب = قائمتين ويلزم ان يكون ا د ى
+ ى د ك = ا د ى + ى د ب وبطرح الزاوية المشتركة ا د ى تبقى
الزاوية ى د ك = ى د ب وهو محال لان الزاوية ى د ك جزء من الزاوية
ى د ب والجزء لا يساوي الكل فيتعين اذا ان الضلع د ا على استقامة
د ب ويستنتج من هذه النظرية .

اولا ان العمودين الخارجين من نقطة واحدة على مستقيم واحد يكونان على
استقامة واحدة كما (الشكل ١٨)

اى اذا اقيم عمودان د ح و د ى من نقطة د على مستقيم ا ب
يكون العمود ح د على استقامة د ى

لان مجموع الزاويتين ا د ح و ا د ى المجاورتين يساوي قائمتين فيكون
ح د على استقامة د ى

وثانيا ان احد المستقيمين اذا كان عمودا على الآخر كان الآخر عمودا عليه
اى اذا كان المستقيم ح ى من الشكل المرسوم عمودا على المستقيم ا ب
كان المستقيم ا ب عمودا ايضا على المستقيم ح ى

لانه يلزم من كون المستقيم ح ى عمودا على ا ب ان تكون الزاوية
ا د ح قائمة وان تكون مجاورتها ا د ى كذلك ويلزم من هذا ان يكون
المستقيم ا ب عمودا على المستقيم ح ى

(الدعوى الخامسة النظرية شكل ٢١)

اذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المتقابلتان برأسيهما تكونان
متساويتين

اى اذا تقاطع مستقيمان مثل ا ب و ح ى من الشكل المرقوم فالزاويتان
ا هـ ح و ب هـ ى تكونان متساويتين اى يكون ا هـ ح = ب هـ ى
لانه يلزم من كون الخط ا ب مستقيما ان يكون
ا هـ ح + ح هـ ب = قائمتين ومن كون الخط ح ى مستقيما ان يكون

ـ دا و هدى و ىدب لكن الاولى هدا قائمة ومجموع
... هدى و ىدب يساوى القائمة هدب حينئذ يكون
مجموع الزاويتين ىدا و ىدب مساويا لقائمتين

ثم برهنه السطرية

ا اذا اكانت احدى الزاويتين المتحاورتين الحادثتين من تلاقى
مستقيما آخر قائمة تكون الاخرى كذلك واذا كانت احداهما حادة تكون
الاخرى منفرجة

وثانيا ان مجموع الزوايا المتوالية مثل ادى و ىده و هدب
و ... الخ المرسومة فى جهة واحدة من مستقيم واحد مثل اب
يساوى قائمتين لان مجموع الزوايا المذكوره يساوى مجموع الزاويتين
المتجاورتين ىدا و ىدب

وثالثا ان مجموع الزوايا المتوالية اوب و بوج و جوى الخ المرسومة
حول نقطه و بخطوط مستقيمة متلاقية فى النقطه المذكورة يساوى اربع
قوائم كما فى (الشكل ٢٢)

فاذا مددنا من النقطة و مستقيما مثل وع يصير مجموع الزوايا
المذكورة كما من مجموع الزوايا المتوالية اوب و بوج و جوع
المرسومة فى جهة واحدة من المستقيم وع ومن مجموع الزوايا المتوالية
... و ... و ... و هوب المرسومة فى الجهة الاخرى
من المستقيم المذكور

*(الدعوى الرابعة السطريه شكل ٢٠)

اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين مساويا لقائمتين كان الضلع الخارج من
احداهما على استقامة الضلع الخارج من الاخرى

اى اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين ادى و ىدب من الشكل
المرقوم مساويا لقائمتين كان الضلع دا على استقامة ضلع دب لانه
لو لم يكن الضلع دا على استقامة الضلع ... لكان على استقامة دك

مثلا

على يساويه ى و والنقطه ح على الـ و ... السلع ... على الضلع هـ ر حينئذ ينطبق المثلث ا ب ح على المثلث د هـ ا فيكونان تساويين وهذا هو المطلوب

ويتبع من هذه الطريقة انه اذا ساوى ضلعان وزاوية ... من مثلث ضلعين وزاوية ... من مثلث آخر كل ... تساوى بقية ... احدهما ... اجزاء الآخر

اى اذا كان الضلع ا ب = للضلع د هـ والضلع ا ح = الضلع د و والزاوية ا = للزاويه د تكون الزاويه ب = للزاوية هـ والزاويه ح = للزاوية و والضلع ب ح = للضلع هـ و

*(الدعوى ... الطريقة شكل ٢٣) .

يتساوى المثلثان اذا تساوى من كل منهما ضلع والزاويتان المجاورتان له كل لنظيره

اى اذا كان الضلع ب ح مساويا للضلع هـ و والزاوية ب مساوية للزاوية هـ والزاوية ح مساويه للزاويه و تكون المثلث ا ب ح مساويا للمثلث د هـ و

(برهانه) اذا وضع المثلث ا ب ح على المثلث د هـ و بحيث ينطبق الضلع ب ح على مساويه هـ و اوقعت النقطة ب على النقطة هـ والنقطه ح على النقطة و وحيث ان الزاويه ب = للزاوية هـ يقع الضلع ا ب على الضلع د هـ وتقع النقطة ا على احدى نقط الخط هـ د وحيث ان الزاوية ح = للزاوية و يقع الضلع ا ح على الضلع د و وتقع النقطة ا على احدى نقط الخط د و وحينئذ تقع النقطة ا على النقطة د وهكذا ينطبق المثلث ا ب ح على المثلث د هـ و ويساويه وهذا هو المطلوب

نتيجه اذا ساوى ضلع وزاويتان مجاورتان له من مثلث ضلعا وزاويتين مجاورتين له من مثلث آخر كل لنظيره تساوت بقية اجزاء احدهما بقية اجزاء

دهـ + ـهد = قائمتين ويكون

اهـ + دهـ = دهـ + ـهد وبطرح الزاوية المشتركه

دهـ تبقى الزاوية اهـ مساوية للزاوية ـهد وهو المطلوب اثباته

وعلى هذا يبرهن على ان الزاوية اهد مساوية للزاوية دهـ

(تنبيه)

اذا كان للزاويتين المتساويتين المتقابلتين برأسيهما ضلعان على خط مستقيم واحد وكانت احداهما في جهة منه مضادة لجهة الاخرى كان الضلعان الآخران كذلك

اي اذا كان الضلعان دهـ و هد على استقامة واحدة وكانت الزاوية دها مساوية للزاوية دهـ ومضادة لها في الاتجاه يكون الضلع هـ على استقامة الضلع ها

(برهانه) ان يقال يلزم من كون المستقيم اهـ ملاقيا للمستقيم دد ان يكون مجموع المجاورتين دها و اهد مساويا لقائمتين وحيث ان الزاوية دهـ مساوية للزاوية دها فرضا يكون مجموع المتجاورتين اهد و دهـ مساويا لقائمتين ويلزم من هذا ان يكون الضلع هـ على استقامة الضلع ها (كما تقدم في المطرية الرابعة)

(الدعوى السادسة المطرية شكل ١٢)

المثلثان يكونان متساويين اذا كان في كل منهما زاوية مساوية لمطرتها من الآخر محصورة بين ضلعين كل منهما مساو لمطيره من الآخر

اي اذا كانت الزاوية ا = للزاوية د والضلع اب = للضلع ده والضلع اج = للضلع دو يكون المثلث ابج = للمثلث دهو

(برهانه) انه لو وضع المثلث ابج على المثلث دهو بحيث ينطبق الضلع اب على مساويه ده لوقعت النقطة ا على النقطة د والنقطة ب على النقطة هـ وحيث ان الزاوية ا = الزاوية د يقع الضلع اج

على

[illegible] المثلث [illegible]

ـه + هـ ح > د ا + ا ب + ب د واذن ا ح [illegible]

ب ا + د ح [illegible]

ـه + هـ ح > ب ا + [illegible] المطلوب

(الدعوى [illegible] شكل ١٠)

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين من مثلث آخر وكانت الزاوية التي بين ضلعي المثلث الاول اكبر من الزاوية التي بين ضلعي المثلث الثاني يكون الضلع الثالث من المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني .

اي اذا كان الضلع ا ب من المثلث ا ب ح مساويا للضلع د هـ من المثلث د هـ و والضلع ا ح مساويا للضلع د و والزاوية ب ا ح اكبر من الزاوية د يكون الضلع ب ح اكبر من الضلع هـ و

(برهانه) ان نرسم زاوية تقابل ب ا ي = الزاوية د ونفرض ا ي = د هـ ونوصل ح ي فيحدث مثلث ا ح ي [illegible] المثلث د هـ و لان الضلع ا ح = د و فرضا والزاوية ح ا ي = الزاوية د عملا والضلع ا ي = د هـ كذلك (كالنظرية السادسة) فمن تساوي المثلثين الضلع ح ي = هـ و فاذا نصفنا الزاوية ب ا ي بمستقيم ا س لاقى هذا المستقيم الاقى الزاوية ب ا ح لانها اكبر من الزاوية ي ا ح [illegible] فاذا وصلنا س ي يكون المثلثان ا ب س ا ي س متساويين لان الضلع ا ب = الضلع ا ي عملا والزاوية ب ا س = الزاوية ي ا س كذلك والضلع ا س مشترك (كالنظرية السادسة) وينتج من تساوي هذين المثلثين ان الضلع ب س = ي س

ومن المعلوم ان المثلث ح ي س فيه الضلع ح ي < ي س + ح س فاذا ابدل الضلع ي س بالضلع ب س كان ح ي < ح س + ب س لكن ح س + س ب = ح ب فيكون ح ي < ح ب وحيث ان ح ي = هـ و يكون هـ و < ح ب أي ح ب > هـ و وهو

الآخر كل بنظيره اى اذا كان الضلع ب ج مساويا للضلع هـ ز والزاويه
ب مساويه للزاويه ط والزاويه ج مساوية للزاويه و كانت الزاويه
ا مساوية للزاوية د والضلع ا ب مساويا للضلع د هـ والضلع ا ج
مساويا للضلع د و

(الدعوى الثامنة النظرية شكل ٢٣)

ای ضلع من ای مثلث اصغر من مجموع الضلعين الآخرين واكبر من فاضلهما
اى ان الضلع ا ب من المثلث ا ب ج اصغر من مجموع الضلعين ا ج
و ج ب واكبر من فاضلهما
(برهان القضية الاولى) ان الخط المستقيم ا ب اصغر من الخط المنكسر
ا ج ب المار بنهايتى المستقيم ا و ب
(وبرهان الثانية) ان الضلع ب ج < ا ب + ا ج فاذا طرح ا ج من
كل من الطرفين بقى ب ج - ا ج < ا ب اى ا ب > ب ج - ا ج
وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة النظرية شكل ٢٤)

اذا احدث نقطة داخل مثلث ووصل منها الى نهايتى احد اضلاعه مستقيمان
مجموع المستقيمين المذكورين يكون اصغر من مجموع الضلعين الباقيين من
المثلث اى اذا احدث نقطة مثل هـ داخل مثلث مثل ا ب ج ووصل منها
الى نهايتى الضلع ب ج مستقيمان ب هـ و هـ ج كان مجموع الخطين
ب هـ و هـ ج اصغر من مجموع الضلعين ب ا و ا ج
(برهانه) انه يقال لو مدّ احد المستقيمين ب هـ على استقامته حتى
حتى قطع الضلع ا ج فى نقطة مثل د لحدث مثلث ا ب د فيه الضلع
ب د < د ا + ا ب اى ب هـ + هـ د < د ا + ا ب وحدث
ايضا مثلث ج د هـ فيه الضلع ج هـ < هـ د + د ج فلو جمعت هذه
الاشياء غير المتساوية الاصغر للاصغر والاكبر للاكبر لحصل
ب هـ + هـ د + ج هـ < د ا + ا ب + هـ د + د ج فاذا

طرح

. هذا يرهن على ان ازاويه ب = للزاو
زاوية ر وحيث ان اجزاء المثلث ا ب د
د هو نكون المثلث ا ب ح مساو للمثلث

(نتيجة) :
يث ان الزوايا المتساوية تكون مقابلة للاضلاع
اويتين أ و د مقابلتان للضلعين المتساوين

ثانية عشر النظرية شكل ٢٨) :
زاويتا المثلث المتساويتان
ساوي الساق ا ح من المثلث ا ب ح تكون

ب ح نقطة مثل د ونوصل المستقيم ا د
ا ب د و د ح ا متساويين لان الضلع ا د
للضلع ا د فرضا والضلع ب د = للضلع
حادية عشر) يلزم من تساوي هذين المثلثين
الزاوية ب وهو المطلوب

(تنبيه) :
المثلث غير المتساوي الساقين يصح ان يسمى قاعدة
رأس المثلث واما المثلث المتساوي الساقين
دون الساقين

نتائج من هذه النظرية) :
الاضلاع فهو متساوي الزوايا
ل من رأس مثلث متساوي الساقين الى وسط
نصف الزاوية الرأس لانه يلزم من تساوي المثلثين

المطلوب

(تنبيه)

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث آخر وكان الضلع الثالث من المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني تكون الزاوية التي بين ضلعي المثلث الاول اكبر من الزاوية التي بين ضلعي المثلث الثاني اي اذا كان الضلع ا ب من المثلث ا ب ح مساويا للضلع د ه من المثلث د ه و والضلع ا ح مساويا للضلع د و وكان الضلع ب ح اكبر من الضلع ه و تكون الزاوية ب ا ح اكبر من الزاوية ه د و

(برهانه) ان يقال لو لم تكن الزاوية ب ا ح اكبر من الزاوية ه د و لكانت اما مساويه لها او اصغر منها فان كانت مساويه لها لزم ان يكون الضلع ب ح مساويا للضلع ه و وهذا محال للمفروض وان كانت اصغر منها لزم ان يكون الضلع ب ح اصغر من الضلع ه و وهو ايضا محال للمفروض فحينئذ تكون الزاوية ب ا ح اكبر من الزاوية ه د و وهو المطلوب

(الدعوى الحادية عشر النظرية شكل ٢٣)

اذا ساوت اضلاع مثلث اضلاع مثلث آخر كل لنظيره كان المثلثان متساويين اي اذا كان الضلع ا ب من المثلث ا ب ح = للضلع د ه من المثلث د ه و والضلع ا ح = للضلع د و والضلع ب ح = للضلع ه و يكون المثلث ا ب ح مساويا للمثلث د ه و

(برهانه) ان يقال يلزم من تساوي الاضلاع المتناظرة ان تتساوى الزوايا المتناظرة اي ان تكون الزاوية ا = للزاوية د والزاوية ب = للزاوية ه والزاوية ح = للزاوية و اذ لو لم تكن الزاوية ا مساوية للزاوية د لكانت اما اكبر منها او اصغر منها فان كانت الزاوية ا اكبر من الزاوية د كان الضلع ب ح اكبر من الضلع ه و وهذا محال للمفروض وان كانت الزاوية ا اصغر من الزاوية د كان الضلع ب ح اصغر من الضلع ه و وهذا ايضا محال للمفروض فتكون الزاوية ا

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال ليكن الضلع ا ب > ا ج فتكون الزاوية ج المقابلة للضلع ا ب اكبر من الزاوية ب المقابلة للضلع ا ج

اذ لو لم تكن الزاوية ج اكبر من الزاوية ب لكانت اما اصغر منها او مساوية لها فان كانت اصغر منها لزم ان يكون ا ب < ا ج وهذا مخالف للمفروض وان كانت مساوية لها لزم ان يكون ا ب = ا ج وهذا ايضا مخالف للمفروض فاذن يلزم ان تكون الزاوية ج اكبر من الزاوية ب وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة عشر النظرية بشكل يه)

النقطة الخارجة عن مستقيم لا يمكن ان ينزل منها عليه الا عمود واحد لا عمودان

(برهان القضية الاولى) ان يقال ليكن ب ج خطا مستقيما و د نقطة خارجة عنه واذا اخذت نقطة منه مثل ه ووصل المستقيم د ه لحدثت زاويتان متجاورتان د ه ج و د ه ب فان كانتا متساويتين كان المستقيم د ه عمودا على المستقيم ب ج وان كانتا غير متساويتين بان كانت الزاوية د ه ب اصغر من الزاوية د ه ج تنشأ زاوية مثل ب ه و = د ه ب ثم يؤخذ الضلع ه و = ه د ثم يوصل المستقيم د و فيكون عمودا على المستقيم ب ج لان المثلث د ه ح = المثلث ح ه و لان الضلع د ه = للضلع ه و بالعمل والضلع ه ح مشترك والزاوية د ه ح = للزاوية ح ه و بالعمل (كما في النظرية السادسة) ويلزم من تساوي هذين المثلثين ان تكون الزاوية د ح ه = للزاوية ه ح و وان يكون المستقيم ح ب عمودا على المستقيم د و فاذن يكون المستقيم د و عمودا على المستقيم ب ج

(وبرهان القضية الثانية) ان تفرض نقطة مثل ج خارجة عن المستقيم ا ب وان ج د عمود عليه ثم يقال ان اي مستقيم مد من النقطة ج الى

اب ء و اء ح ان تكون الزاوية ب اء = للزاوية د اح والزاوية
اء ب = للزاوية اء ح

(الدعوى الثالثة عشر النظرية شكل ٢٩)

اذا تساوى زاويتان من مثلث تساوى الضلعان المقابلان لهما
اى اذا كانت الزاوية اب ح = اح ب يكون الضلع اح = اب

(برهانه) ان يقال لو تصورنا مثلثا كالمثلث اَ بَ حَ مساويا للمثلث
اب ح بحيث يكون الضلع بَ حَ = ب ح والزاوية بَ = ب
والزاوية حَ = ح ثم طبقنا المثلث اَ بَ حَ على المثلث اب ح بحيث
تقع النقطة حَ على النقطة ب والنقطة بَ على النقطة ح لكان
الزاوية حَ = ح = ب وحينئذ يقع الضلع حَ اَ على الضلع ب ا
والضلع بَ اَ على ح ا وتقع النقطة اَ على النقطة ا فيكون اَ بَ
= اح ويلزم من هذا ان يكون اب = اح وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة عشر النظرية شكل ٣٠)

اى مثلث احدى زاويتيه اكبر من الاخرى يكون ضلعه المقابل للكبرى اكبر
من ضلعه المقابل للصغرى وبالعكس اى اى مثلث احد ضلعيه اكبر من
الآخر تكون زاويته المقابلة للضلع الاكبر اكبر من زاويته المقابلة للضلع
الاصغر

(برهان القضية الاولى) ان يقال لتكن الزاوية ح > ب فيكون الضلع
اب المقابل للزاوية ح اكبر من الضلع اح المقابل للزاوية ب
وبيانه تنشأ زاوية مثل ب ح ء مساوية للزاوية ب فيكون المثلث
الحادث ب ح ء متساوى الساقين اى يكون ب ء = ء ح وحيث
ان الخط المستقيم اح اقصر من اء + ء ح و اء + ء ح
= اء + ء ب = اب يكون اب اكبر من اح

يكونان متساويين اذا كان البعدان ب د و ب هـ متساويين

وثالثا ان المائلين أ د و أ هـ اذا كانا متساويين فالبعدان ب د

و ب هـ يكونان كذلك

ورابعا ان البعد ب ى اذا كان اكبر من البعد ب هـ كان المائل أ ى

اطول من المائل أ هـ

وخامسا ان المائل أ ى اذا كان اطول من المائل أ هـ كان البعد ب ى

اكبر من البعد ب هـ

(برهان القضية الاولى) ان يمد العمود أ ب على استقامته من جهة ب

ثم نوجد البعد ب ر = أ ب ونوصل ر د فيحدث مثلث ر ب د =

للمثلث د ب ا لان الزاوية ر ب د = د ب ا لانهما قائمتان والضلع د ب

مشترك والضلع ر ب = للضلع ب ا بالعمل (كالنظرية السادسة)

ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان يكون الضلع د ر = د ا لكن

فى المثلث ا د ر الضلع ا ر < ا د + د ر اى ان ٢ ا ب < ٢ ا د

فاذن يكون ا ب < ا د وهو المطلوب

(برهان القضية الثانية) ان يقال حيث ان البعد ب د = ب هـ

بالفرض والضلع ا ب مشترك والزاوية د ب ا = الزاوية ا ب هـ

لانهما قائمتان يكون المثلث ا ب د = للمثلث ا ب هـ ويلزم من تساوى

هذين المثلثين ان يكون د ا = ا هـ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) ان يقال حيث ان المائل د ا = للمائل ا هـ

يكون المثلث د ا هـ متساوى الساقين وحينئذ يكون العمود ا ب النازل

من رأسه على قاعدته مارا بوسطها اى يكون د ب = ب هـ وهو

المطلوب

(وبرهان القضية الرابعة) ان يقال حيث ان البعد ب ى > ب هـ يكون

المائل ا ى > ا هـ لانه اذا اخذ ب د = ب هـ ووصل ا د

و د و يحدث مثلث و ب هـ = للمثلث ب د ا لان الزاوية و ب د

اى نقطة من نقط المستقيم ا ب غير النقطة د لا يكون عمودا عليه فان قيل يمكن ان يقام عمود آخر مثل حو مثلا قلنا اذا مد حد على استقامته جهة د بمقدار هد = دح ثم وصل المستقيم هو حدث مثلث هدو = للمثلث ودح لان الضلع ود مشترك والضلع هد = للضلع دح بالعمل والزاوية هدو = للزاوية ودح لقيامهما ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان تكون الزاوية هود مساوية للزاوية دوح وحيث ادعى ان حو عمود على اب تكون الزاوية دوح قائمة فتكون الزاوية هود كذلك ويلزم من هذا ان يكون مجموع المتجاورتين حود ودوه مساويا لقائمتين وعليه يكون الخط حوه مستقيما واحدا مارا بالنقطتين ح و ه المار بهما المستقيم حده ويلزم من هذا امكان وصل مستقيمين بين نقطتين وهو محال فتبين بهذا ان مجموع المتجاورتين حود ودوه لا يكون مساويا للقائمتين حينئذ لا تكون الزاوية حود قائمة يعنى ان المستقيم حو ليس عمودا على المستقيم اب وهو المطلوب

(الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ٣١)

اذا احدث نقطة خارج مستقيم وانزل منها عمود ومواتل فاعلم

اولا ان العمود اقصر من كل مائل

وثانيا ان المائلين ذوى البعدين المتساويين عن موقع العمود متساويان

وثالثا ان بعدى المائلين المتساويين عن موقع العمود متساويان

ورابعا ان المائلين ذوى البعدين غير المتساويين ابعدهما عن موقع العمود اطولهما

وخامسا ان المائلين غير المتساويين اطولهما ابعدهما عن موقع العمود

اى اذا احدث نقطة مثل ا خارج خط مثل ده وانزل منها عمود اب ومواتل اه و اح و اء الخ فاعلم

اولا ان العمود اب يكون اصغر من كل مائل

وثانيا ان الخطين اح و اه المائلين الا متباعدين عن موقع العمود

يكونان

ن متساويين

ـ وهـ على وسط مستقيم اب محدود بنقطتين ا و ب

د و دب يكونان متساويين

و رب لايكونان متساويين

لاولى) ان يقال حيث ان العدد ها = هب بالفرض

ثل دا = دب والمائل ار = رب والمائل اه

اى الطريقة السادسة عشر)

لعددين الموصولين من اى نقطة من خط العمود هو الى

اب يكونان متساويين

ة الثانية) ان تفرض نقطة مثل ر خارج العمود هو

رب ثم يوصل دب فيكون اد = دب كما سبق

ثلث ربد الضلع بر < رد + دب و دب =

ر < رد + دا و رد + دا = را فيكون بر

العددين الموصولين من اى نقطة خارج العمود هو الى

اب لا يكونان متساويين بل القاطع للعمود اطول من

ويتضح من هذه الطريقة

كان لمستقيم نقطتان كل منهما على بعدين متساويين من نهايتى

المستقيم الاول عمودا على وسط الآخر لان المستقيم الذى

بالعمود المار بوسط المستقيم المفروض لاشتراكه

كانت نقطة خارج مستقيم وكان العددان الواصلان منها

متساويين كانت خارج العمود المار بوسط المستقيم

لمه لكان العددان الواصلان منها الى نهايتى المستقيم المفروض

= للزاوية و ب ا لقيامهما والضلع ح ب مشترك والضلع و ب = للضلع ب ا بالعمل (كما في الطريقة السادسة) ويلزم من تساوي هذين المثلثين ان يكون و ح = ح ا وايضا اذا وصل و ى يحدث مثلث و ى ب = للمثلث ى ب ا لان الزاوية و ب ى = للزاوية ى ب ا لقيامهما والضلع ى ب مشترك والضلع و ب = للضلع ب ا بالعمل (كما في الطريقة السادسة) ويلزم من تساوي هذين المثلثين ان يكون و ى = ى ا لكن ا ى + ى و > ا ح + ح و أي ٢ ا ى > ٢ ا ح أو ا ى > ا ح و ا ح = ا هـ فيكون ا ى > ا هـ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الخامسة) ان يقال حيث ان المائل ا ى اطول من المائل ا هـ يكون البعد ى ب اكبر من البعد ب هـ لانه لو لم يكن البعد ى ب اكبر من البعد ب هـ لكان مساويا له أو اصغر منه فان كان مساويا له يلزم ان يكون المائل ى ا مساويا للمائل ا هـ وهذا مخالف للمفروض وان كان اصغر منه يلزم ان يكون المائل ى ا اصغر من المائل ا هـ وهو ايضا مخالف للمفروض فاذن يكون البعد ى ب اكبر من البعد ب هـ وهو المطلوب

وينتج من هذه الطريقة

اولا ان البعد الحقيقي بين نقطة ومستقيم هو العمود النازل منها عليه لانه تبين ان العمود اصغر من كل مائل مار بها وباي نقطة من نقطه

وثانيا انه لا يمكن ان يوصل من نقطة الى مستقيم ثلاثة خطوط مستقيمة متساوية لانه تبين ان المائل الابعد عن العمود هو الاطول من المائل الاقرب للعمود المذكور

(الدعوى السابعة عشر الطريقة شكل ٣٢)

اذا اقيم عمود على وسط مستقيم محدود فاعلم اولا ان البعدين الموصولين من أي نقطة من نقط العمود الى نهايتي المستقيم المذكور يكونان متساويين وثانيا ان البعدين الموصولين من اي نقطة خارج العمود الى نهايتي المستقيم

المذكور

المطلوب

(الدعوى العشرون النظرية شكل ٢٠)

اذا نصف زاوية بمستقيم فاعلم اولا ان العمودين النازلين على ضلعيها من اى نقطة من نقطه متساويان

وثانيا ان العمودين النازلين على ضلعيها من اى نقطة خارجة عن منصفها غير متساويين

اى اذا نصف زاوية مثل ب ا د بمستقيم ا ج فاعلم اولا ان العمودين ج و و ج ح النازلين على ضلعيها ب ا و ا د من اى نقطة من وسط ا ج كالنقطة ج يكونان متساويين .

وثانيا ان العمودين ى هـ و هـ ط النازلين على ضلعيها ب ا و ا د من نقطة مثل هـ خارجة عن المستقيم ا ج لا يكونان متساويين

(برهان القضية الاولى) ان يقال حيث ان الزاوية ج ا و = للزاوية و ا ج فرضا و الوتر ا و مشترك بين المثلث ا و ب القائم الزاوية فى ب والمثلث ا و ج القائم الزاوية فى ج يكون المثلثان متساويين ويلزم من تساويهما ان يكون العمود ب و = للعمود و ج وهو المطلوب

(برهان القضية الثانية) ان ينزل من النقطة ج عمود ج ل على الضلع ثم نوصل مستقيم هـ ل فيكون العمود ط هـ اصغر من المائل هـ ل وحيث ان فى المثلث هـ ل ج ان الضلع هـ ل < هـ ج + ج ل وان ج ل = ج ى يكون هـ ل < هـ ج + ج ى لكن هـ ج + ج ى = هـ ى فيكون هـ ل < هـ ى وحيث ان ط هـ < هـ ل يكون ط هـ < هـ ى وهو المطلوب

(تنبيه)

المستقيم المنصف لزاوية هو المحل الهندسى لكل نقطة بعداها عن ضلعى الزاوية متساويان

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية شكل ٢١)

اثر

متساويين وهذا خلاف المفروض

(الدعوى الثامنة عشر المطوية شكل ٣٣)

تتساوى المثلثات القائمة الزاوية اذا تساوى فيهما الوتر والزاوية غير القائمة كل لنظيره اى اذا كان الوتر ا ح = للوتر د و والزاوية الحادة ح = لنظيرتها و يكون المثلث ا ب ح = للمثلث د ه و

(برهانه) ان يقال لو وضع المثلث ا ب ح على المثلث د ه و بحيث تقع النقطة ا على النقطة د والوتر ا ح على الوتر د و لوقعت النقطة ح على النقطة و وحيث ان الزاوية ح = و يقع الضلع ح ب على الضلع و ه وكذا النقطة ب على النقطة ه والا كان تنزيل عمودين من النقطة د على المستقيم و ه وهو محال فاذن تكون الزاوية ا = الزاوية د ويكون المثلث ا ب ح = للمثلث د ه و وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة عشر المطوية شكل يط)

تتساوى المثلثات القائمة الزاوية اذا ساوى فيهما الوتر واحد الضلعين المحيطين بالقائمة كل لنظيره

اى اذا كان الوتر ا ح = للوتر اَ حَ والضلع ا ب = للضلع اَ بَ يكون المثلث ا ب ح = للمثلث اَ بَ حَ

(برهانه) ان يقال لو وضع المثلث ا ب ح ملاصقا للمثلث اَ بَ حَ بحيث يتحد الضلع ا ب بالضلع اَ بَ لصار الضلع ح ب على استقامة الضلع حَ بَ لان كلا من الزاويتين المتجاورتين ح ب ا و اَ بَ حَ قائمة ويلزم من كون المائل ح ا = للمائل اَ حَ ان يكون البعد ح ب = للبعد بَ حَ فاذن يكون المثلث ح ا ب = للمثلث اَ بَ حَ وهو المطلوب

الزاوية ا ب د اصغر من الساحة ا ب ح ط فعلى أن اى زاوية كبيرة كانت او صغيرة اكبر دائما من اى ساحة مستطيلة

(الدعوى الثالثة والعشرون الطرية شكل كب)

اى مائل على مستقيم يقطع دائما العمود على المستقيم المذكور

اى اذا كان مستقيم مثل ح د مائلا على مستقيم مثل ح ا وكان المستقيم ا ب عمودا على ح ا فان المائل ح د والعمود ا ب يتقاطعان اذا امتدا امتدادا كافيا .

(برهانه) ان يقال لو اقيم من النقطة ح عمود ح ك على ح ا لحدثت زاوية ك ح د اكبر من الساحة ك ح ا ب ويلزم من هذا ان يخرج هذه الزاوية عن الساحة المذكورة وحيث كان الضلع ح ك مشتركا بين الزاوية ك ح د والساحة ك ح ا ب لزم لخروج الزاوية من الساحة ان يقطع امتداد الضلع الآخر ح د من الزاوية احد اضلاع الساحة ويكون ح د قاطعا للضلعين ح ا و ح ك من اول الامر فلا يمكن ان يقطعهما مرة اخرى فاذن يقطع الضلع ا ب وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا كانت الزاوية الحادثة بين المستقيم ح ا والمستقيم المائل عليه المار بالنقطة ح ـــ كالزاوية ا ح د مثلا بعد المائل ح د على استقامته جهة ح فحدث بينه وبين امتداد العمود ح ك زاوية د ح ك حادة اكبر من الساحة ح ا ب ك ويلزم من هذا ان الضلع ح د الذى هو امتداد المائل ح د يقطع الضلع ا ب الذى هو امتداد العمود ا ب

*(الدعوى الرابعة والعشرون الطرية شكل كح) :

اذا اخذت نقطة خارج مستقيم امكن دائما ان يمد منها مستقيم يوازى المستقيم المذكور اولا ثانيا

اى اذا اخذت نقطة مثل و خارج مستقيم مثل ا ب فاعلم اولا انه يمكن

المستقيمان العمودان على ثالث متوازيان اى اذا كان مستقيمان ب ر
د م و هـ و عمودين على مستقيم ثالث مثل ا ب كانا متوازيين
(برهانه) ان يقال لو لم يكونا متوازيين لامكن التقاؤهما فى نقطة مثل ط
ويلزم من هذا امكان تنزيل عمودين على مستقيم واحد من نقطة واحدة وهو
محال كما تبين (فى النظرية الخامسة عشر)

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية شكل كب) *

اى زاوية فهى اكبر من اى مساحة مستطيلة وهى بالمساحة المستطيلة
المساحة غير المحدودة الحادثة من ثلاثة خطوط مستقيمة اثنان منها عمودان
على الثالث كالمساحة الحادثة من الخطوط ا ب و ب ج و ج ط
(وبرهانه) ان نرسم فى الزاوية القائمة ا ب ج زاوية صغيرة مثل ا ب د
ونرسم بجانب هذه الزاوية الصغيرة زاوية د ب هـ = ا ب د وبجانب الزاوية
د ب هـ زاوية هـ ب و تساوى الزاوية د ب هـ وبجانب هذه الزاوية
الثالثة زاوية رابعة تساوى الثالثة وبجانب الرابعة خامسة تساويها ثم سادسة
تساوى الخامسة وهكذا وبهذه الكيفية يزيد مجموع تلك الزوايا عن الزاوية
القائمة ا ب ج

واذا اخذ ب ح = ح ب و ل ب = ب ح و س ل = ل ب
وهكذا واقيمت اعمدة ح ط و ب ك و ل م و س ن على ب ج
فالمساحة المستطيلة ا ب ح ط تساوى المساحة المستطيلة ط ح ب ك
لانه لو حركت الاولى حول ح ط وطبقت على الثانية لانطبقت القائمة
ب ح ط على القائمة ط ح ب وانطبق المستقيم ب ح على مساويه
ح ب ووقعت النقطة ب على النقطة ب ووقعت الزاوية ا ب ح على
مساويتها ح ب ك ووقع الضلع ب ا على ب ك وانطبقت المساحة
ا ب ح ط على ط ح ب ك وساوتها وبمثل هذا يبرهن على ان المساحة
ط ح ب ك مساوية للمساحة ك ب ل م وان هذه مساوية لتاليتها وهكذا
ومن حيث ان مجموع تلك المساحات لا يملأ الزاوية القائمة ا ب ج يظهر ان

الزاوية

(برهانه) ان يقال لو لم يكن ه ك عمودا على هـ و لكان مائلا عليه ويلزم من هذا تلاقيه بالعمود ا ب وهو محال

(تعاريف شكل ٣٨)

اذا قطع مستقيم مستقيمين حدث من تقاطعه بهما ثمان زوايا اربع منها وهي الكائنة في المسافة التي بين المتوازيين تسمى زوايا داخلة والاربع الاخرى زوايا خارجة

اي اذا قطع مستقيم مثل هـ و مستقيمين مثل ا ب , ح ء فالزوايا ا ر ح و ح ر ب و ب ح ر و ر ح ء تسمى زوايا داخلة والزوايا ا ر هـ و هـ ر ب و ب ح و و ء ح و تسمى زوايا خارجة

فاما الزاويتان ا ر ح و ر ح ء فتسميان زاويتين متبادلتين داخلتين

وكذلك الزاويتان ب ح ر و ح ر ب

واما الزاويتان ا ر هـ و و ح ء فتسميان زاويتين متبادلتين خارجتين

وكذلك الزاويتان هـ ر ب و ب ح و

واما الزاويتان ا ر هـ و ب ح ر فتسميان متناظرتين بالخروج والدخول

وكذلك الزاويتان هـ ر ب و ر ح ء والزاويتان ا ر ح و ب ح و والزاويتان [illegible] ر ح و ء ح و

واما الزاويتان ا ر ح و ر ح ء المجاورتان للقاطع فتسميان متحاذيتين داخلتين وكذلك الزاويتان ب ر ح و ر ح ء

واما الزاويتان ا ر هـ و ب ح و فتسميان متحاذيتين خارجتين وكذلك الزاويتان هـ ر ب و ء ح و

(الدعوى الثامنة والعشرون المطردة شكل ـــ)

اذا قطع المستقيم مستقيمين متوازيين فاعلم

اولا ان الزاويتين المتبادلتين الداخلتين متساويتان

وثانيا ان الزاويتين المتناظرتين متساويتان

دائما ان يمدّ منها مستقيم يوازى المستقيم ا ب
وثانيا انه لا يمكن ان يمد منها الا ان يوازيان المستقيم المعلوم ا ب

(برهان القضية الاولى) ان يقال لو انزل من النقطة و عمود مثل وس على المستقيم المعلوم ا ب واقيم من النقطة المذكورة و عمود مثل حء على وهـ لكان المستقيم حء موازيا للمستقيم المعلوم ا ب لان المستقيمين حء و ا ب عمودان على مستقيم واحد هو و وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال لو مدّ من النقطة و مستقيم غير حء مثل طح لم يكن عمودا على وهـ فيقطع ا ب

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية شكل كد)
المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان اى اذا كان مستقيمان مثل حء و هو موازيين لثالث مثل ا ب كانا متوازيين
(برهانه) ان يقال لو امكن تلاقيهما فى نقطة مثل م لامكن ان يمد من نقطة واحدة مستقيمان موازيان لثالث وهو محال

(الدعوى السادسة والعشرون النظرية شكل كه)
كل مستقيم قطع احد متوازيين يقطع الاخر اى ان اى مستقيم مثل هو اذا قطع احد متوازيين مثل ا ب فانه يقطع الموازى الآخر حء
(برهانه) ان يقال لو فرض المستقيم هو موازيا للمستقيم حء لامكن ان يمد من نقطة تقاطع المستقيم هو بالمستقيم ا ب مستقيمان موازيان للمستقيم حء وقد تقدم ان هذا محال

(الدعوى السابعة والعشرون النظرية شكل كو)
اى عمود على احد متوازيين يكون عمودا على الآخر
اى اذا وجد مستقيمان متوازيان مثل ا ب و حء ومستقيم مثل هو عمود على المستقيم ا ب كان عمودا ايضا على المستقيم حء فيلزم ان يكون حء عمودا عليه

(برهانه)

هو المطلوب

(تنبيه)

خطوطان تقاطع مائل يتكون من تقاطعه معهما ثماني
ع منها اربع خارجة والاربع الاول متساوية والاخرى كذلك
الاول تتمم اي زاوية من الاربع الاخر
التاسعة والعشرون المطرية شكل ٢٦)
... ثم يكونان متوازيين اذا كانت الزاويتان
متساويتين
ب ا و ج د اذا قطعهما ثالث مثل هو يكونان
زاويتان التبادليتان الداخلتان هـ ا ع و د ج ح

من المعلوم ح نقطة مثل ط وارسل منها عمود
د ومد العمود على استقامته جهة ط حتى
نقطة مثل ى ط ر فمثلثان متساويان ك ح ط
ح ى ط = الضلع ط ر بالعمل والزاوية ح ط
وصا والزاوية ك ط ح = ح ط ر لتقابلهما
ية السابعة) ويلزم من تساوي هذين المثلثين ان يكون
الزاوية ط ك ى لكن الزاوية ط ك ح قائمة
الزاوية ر ح ط كذلك ويلزم من هذا ان يكون
على المستقيم ك ى وان يكون موازيا للمستقيم
ية الحادية والعشرين ان المستقيمين العمودين على
المطلوب

وينتج من هذه الطريقة
خطوطين تقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الخارجتان متساويتين

وثالثا ان الزاويتين المتبادلتين الخارجتين متساويتان

ورابعا ان الزاويتين المتحاذيتين الداخلتين متممتان لبعضهما اى ان مجموعهما يساوى قائمتين

وخامسا ان الزاويتين المتحاذيتين الخارجتين متممتان لبعضهما

(برهان القضية الاولى) ان يقال لو نصف البعد وح بنقطة مثل ط وارسل منها عمود طك على حد ومد كط على استقامته جهة ط حتى لاقى المستقيم اب فى ى لكان كى عمودا على الخط اب الموازى للخط حد لانه قد ثبت فى النظرية السابعة والعشرين ان العمود على احد المتوازيين عمود على الآخر فيكون المثلثان الحادثان كحط و طرى قائمى الزاوية ومتساويين لان الوتر حط مساو للوتر طر بالعمل والزاوية حطك مساوية للزاوية رطى لتقابلهما برأسيهما (كما فى النظرية الثامنة عشر) ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان تكون الزاوية كحط مساوية للزاوية طرى وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال حيث تبين ان الزاوية كحط = طرى و طرى = ارهـ لتقابلهما بالرأس تكون الزاوية كحط = ارهـ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) ان يقال حيث تبين ان الزاوية كحط = طرى و كحط = وحد و طرى = ارهـ تكون الزاوية وحد = ارهـ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الرابعة) ان يقال حيث تبين ان الزاوية كحط = طرى وقد علم ان كحط + طحد = قائمتين فيكون طرى + طحد = قائمتين وهو المطلوب

(وبرهان القضية الخامسة) ان يقال حيث تبين ان الزاوية كحط = ارهـ وقد علم ان كحط + كحو = قائمتين فيكون ارهـ +

ك

اي اذا كانت الزاويتان المتجانستان الخارجتان ا ر هـ و ح ح و متممتين لبعضهما يكون المستقيمان ا ب و ح د متوازيين

(برهانه) ان يقال حيث ان مجموع الزاويتين المتجاورتين ا ر هـ و هـ ر ب مساو لقائمتين وبالفرض مجموع المتجانستين ا ر هـ و ح ح و مساو لقائمتين يكون ا ر هـ + هـ ر ب = ا ر هـ + ح ح و فاذا طرحت الزاوية المشتركة ا ر هـ تبقى الزاوية هـ ر ب = للزاوية ح ح و ويلزم من هذا ان يكون المستقيمان ا ب و ح د متوازيين وهو المطلوب

(الدعوى الثلاثون النظرية شكل كط)

اذا قطع مستقيم مستقيمين وكان مجموع الزاويتين المتجانستين الداخلتين اكبر او اصغر من القائمتين فالمستقيمان المذكوران يلتقيان في الجهة التي يكون فيها مجموع الزاويتين المذكورتين اصغر من القائمتين

اي اذا قطع مستقيم مثل هـ و مستقيمين مثل ا ب و ر س وكان مجموع الزاويتين المتجانستين الداخلتين ا ح ط و ح ط ر اصغر من قائمتين فالمستقيمان ا ب و ر س يلتقيان جهة ا و ر

(برهانه) ان يقال يلزم من كون مجموع الزاويتين ا ح ط و ح ط ر اصغر من قائمتين ان يكون المستقيمان ا ب و ر س غير متوازيين لانهما لو كانا متوازيين لكان مجموع الزاويتين ا ح ط و ح ط ر مساويا لقائمتين وهذا مخالف للمفروض فتبين بهذا ان المستقيمين المذكورين يكونان غير متوازيين بقي علينا ان نبين الجهة التي يلتقيان فيها فنقول لو مد من النقطة ط مستقيم مثل ح د يوازي المستقيم ا ب لظهر ان المستقيم ر س يصنع مع المستقيم ح د زاوية ر ط ح وانه اذا امتد يصنع مع ا ب زاوية معادلة ومساوية لها وحيث كانت رأس احداهما في ط يلزم ان تكون رأس الاخرى جهة ر اي ان المستقيمين ا ب و ر س يلتقيان جهة ر وهو المطلوب

اى اذا كانت الزاويتان المبادلتان الخارجتان ارهـ و دحو متساويتين
يكون المستقيمان اب و حد متوازيين

(برهانه) ان يقال حيث ان الزاوية ارهـ = بزح بالتقابل والزاوية
دحو = حزر كذلك و ارهـ = دحو بالفرض تكون الزاوية
بزح = للزاوية حزر ويلزم من هذا ان يكون المستقيمان اب
و حد متوازيين وهو المطلوب

وثانيا ان المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المتناظرتان متساويتين

اى اذا كانت الزاويتان المتناظرتان ارهـ و حزر متساويتين يكون
المستقيمان اب و حد متوازيين

(برهانه) ان يقال حيث ان الزاوية ارهـ = للزاوية بزح بالتقابل
والزاوية ارهـ = حزر بالفرض تكون الزاوية بزح = للزاوية
حزر ويلزم من هذا ان يكون المستقيمان اب و حد متوازيين وهو
المطلوب

وثالثا ان المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المتجانستان الداخلتان متممتين لبعضهما

اى اذا كانت الزاويتان المتجانستان الداخلتان ارح و زحد متممتين
لبعضهما يكون المستقيمان اب و حد متوازيين

(برهانه) ان يقال حيث ان مجموع الزاويتين المتجاورتين ارهـ و ارح
مساو لقائمتين ومجموع الزاويتين ارح و رحد مساو لقائمتين يكون
ارهـ + ارح = ارح + رحد فاذا طرحت الزاوية المشتركة
ارح تبقى الزاوية ارهـ = للزاوية رحد ويلزم من هذا ان يكون
المستقيمان اب و حد متوازيين وهو المطلوب

ورابعا ان المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المتجانستان الخارجتان متممتين لبعضهما

اى

العمود هو اصغر من المائل ح ط وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا كان العمود هو والمائل ح ط متقاطعين في نقطة بين التوازيين كالنقطة س فيقال في البرهان من المعلوم ان العمود هس > المائل سح والعمود سو > المائل سط وان مجموع العمودين اصغر من مجموع المائلين اى هس + سو < سح + سط لكن هس + سو = هو و سح + سط = ح ط فاذن يكون هو < ح ط وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية شكل لح)

المستقيم الموازي لاحد مستقيمين متلاقيين يتلاقى بالمستقيم الموازي للآخر على زاويتين احداهما تساوي زاوية المستقيمين المتلاقيين والاخرى تتممها

أي اذا تلاقى مستقيمان مثل اب و بح وهذا مستقيم مثل طل يوازي المستقيم اب وهذا ايضا مستقيم مثل وك يوازي المستقيم بح فالمستقيمان طل و وك يلتقيان على زاويتين احداهما دهو = ابح والاخرى دهك تتممها

(برهانه) اولا لو لم تلاق المستقيم وك بالمستقيم طل لكانا متوازيين

ويلزم من هذا انه يمكن ان يمد من نقطة واحدة مثل ب مستقيمان مثل اب و بح موازيان لمستقيم مثل وك وقد تقدم انه محال فحينئذ المستقيمان وك و طل لا يتوازيان بل يلتقيان

ويلزم من توازي المستقيمين اب و طل ان تكون الزاويتان المتبادلتان الداخلتان ابح و بدهـ متساويتين ومن توازي المستقيمين بح و وك ان تكون المتبادلتان الداخلتان بدهـ و دهو متساويتين فاذن تكون الزاويتان ابح و دهو متساويتين وهو

(الدعوى الحادية والثلاثون المطرية شكل ٤٠)

المستقيمان المتوازيان يكونان على ابعاد متساوية اى ادا توازى مستقيمان مثل اب و حد كان العمودان حو و زه المحصوران بينهما متساويين

(برهانه) ان يقال لو وصل المستقيم وز لكان المثلثان الحادثان حوز و زوه متساويين لان الضلع وز مشترك والزاوية حزو = للزاوية زوه بالتبادل والزاوية حوز = للزاوية وزه بالتبادل كذلك (كما فى المطرية السابعة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان يكون العمودان حو و زه متساويين وهو المطلوب

(الدعوى الثانية والثلاثون المطرية شكل ٤٠)

المستقيمان اللذان على ابعاد متساوية يكونان متوازيين

اى ان المستقيمين اللذين على ابعاد متساوية مثل اب و حد يكونان متوازيين

(برهانه) ان يقال لو وصل مستقيم مثل وز لكان المثلثان الحادثان حوز و وزه متساويين لان الضلع وز مشترك والضلع حو = للضلع زه فرضا والزاوية حوز = للزاوية وزه بالتبادل (كما فى المطرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان تكون الزاوية حزو = للزاوية زوه ويلزم من كونهما متبادلتين ان يكون المستقيمان حد و اب متوازيين وهو المطلوب

(الدعوى الثالثة والثلاثون المطرية شكل اب)

العمود المحصور بين المتوازيين اصغر من كل مائل محصور بينهما

اى ان العمود هو المحصور بين المتوازيين اب و حد اصغر من كل مائل مثل حط محصور بينهما

(برهانه) ان يقال لو انزل من النقطة ح عمود حك على وز لكان هو = حك كما فى المطرية الحادية والثلاثين لكن العمود حك < المائل حط ويلزم من كون العمود حك < المائل حط ان يكون

العمود

اب عمود على المستقيم اب يكون باك + كاب = قائمة وايضا من حيث ان المستقيم اك عمود على المستقيم اح يكون باك + باح = قائمة ويلزم من هذا ان يكون باك + كاب = باك + باح فاذا طرحت الزاوية المشترك باك من الطرفين نتج ان الزاوية كاب = باح ويلزم من كون الزاوية داب = للزاوية دهو ان تكون الزاويتان باح و دهو متساويتين وهو المطلوب

ومن المعلوم ان الزاوية وهط متممة للزاوية دهو فهي متممة للزاوية باح

(تنبيه)

يحدث من تلاقي المستقيمين وح و دط العمودين على المستقيمين المتلاقيين با و اح اربع زوايا منها اثنتين كلتاهما تساوي زاوية المستقيمين المعلومين واثنان كلتاهما تتمم الزاوية المذكورة فاذا الزاويتان دهو و حهط فكلاهما تساوي الزاوية باح واذا الزاويتان دهح و وهط فكلاهما تتمم الزاويه باح

(الدعوى السادسة والثلاثون النظرية شكل لو)

اذا امتد ضلع من مثلث فالزاويه الحادثة بمده تساوي مجموع زواياه الداخله الا المجاورة لها

اى اذا امتد الضلع بح على استقامته جهة ح مثلا فالزاويه الحادثة احء تساوي مجموع زاويتيه الداخلتين حاب و ابح

(برهانه) ان يقال لو مد من النقطة ح مستقيم مثل حه يوازي الضلع اب لانقسمت الزاوية احء الى زاويتين احداهما احه = حاب بالتبادل والاخرى هحء = ابح بالتناظر لكون المستقيمين اب و حه متوازيين مقطوعين بالمستقيم بء فاذن يكون احه + هحء = حاب + ابح لكن احه + هحء = احء

المطلوب

(تنبيهات)

الاول يحدث من تلاقي طل و دك اربع زوايا منها اثنتان كلتاهما تساوي زاوية المستقيمين المعلومين واثنتان كلتاهما تتمم الزاوية المذكورة فاما الزاويتان دهو و كهل فكلتاهما تساوي الزاوية احـ واما الزاويتان دهك و لهو فكلتاهما تتمم الزاوية احـ

الثاني تكون الزاويتان متساويتين اذا كان كل ضلع منهما موازيا لنظيره سواء كان على اتجاهه او على عكس اتجاهه

الثالث تكون الزاويتان متممتين لبعضهما اذا كان كل ضلع منهما موازيا لنظيره وكان اتجاه احد ضلعي احداهما بعكس اتجاه نظيره واتجاه الضلع الآخر كاتجاه نظيره

(الدعوى الخامسة والثلاثون النظرية شكل لد)

العمود المقام على احد مستقيمين متلاقيين يتلاقى بالعمود المقام على المستقيم الآخر على زاويتين احداهما تساوي زاوية المستقيمين المعلومين والاخرى تتممها

اي ان المستقيم مثل دط العمود على مستقيم مثل اب متلاق بالمستقيم اح يتلاقى بالعمود وح المقام على المستقيم اح على زاويتين احداهما دهو تساوي الزاوية باح والاخرى وهط تتممها

(برهانه) ان يقال لو اقيم من رأس الزاوية ا عمود اك على اح وعمود اى على اب لكان وح موازيا اك و دط موازيا اى وبمقتضى النظرية السابقة يتلاقى وح بالمستقيم دط وحيث ان كلا من المستقيمين اى و هد عمود على المستقيم اب وكلا من المستقيمين اك و هو عمود على المستقيم اح تكون الزاوية كاى مساوية للزاوية دهو لانه قد تقدم ان الزاويتين اللتين اضلاعهما المتناظرة متوازية ومتجهة الى جهة واحدة متساويتان وحيث ان المستقيم

وخامسا ان اى مثلث قائم الزاويه مجموع الزاويتين المجاورتين لوتر قائمته يساوى قائمة لان مجموعهما يتمم قائمة

وسادسا انه اذا كان المثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين ساوت كل زاوية من المجاورتين لوتر قائمته نصفها

وسابعا انه لا يمكن ان يكون فى المثلث زاويتان قائمتان كل على حدتها اذ لو كان كذلك للزم ان يكون مجموع زواياه الثلاث اكبر من قائمتين وهو محال

وثامنا انه لا يمكن ان يكون فى المثلث زاويتان منفرجتان ولا منفرجه وقائمة

وتاسعا ان اى مثلث منفرج الزاوية مجموع زاويتيه المجاورتين لوتر منفرجته اقل من القائمة

وعاشرا ان اى زاوية من اى مثلث متساوى الاضلاع تساوى ثلث القائمتين او ثلثى القائمة فاذا جعل مقدار القائمة وحدة كان مقدار زاوية المثلث المتساوى الاضلاع $\frac{2}{3}$ وان جعل مقدار القائمة ٩٠ درجه كان مقدار زاويته ٦٠ درجة

*(الدعوى السابعة والثلاثون النظرية)

ان توازت الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة

(برهانه) ان يقال لو رمز لزوايا المثلث الاول بالحروف ا و ب و ج ولزوايا المثلث الثانى بالرموز اَ و بَ و جَ وفرض ان ضلعى الزاوية ا موازيان لضلعى الزاوية اَ كل لنظيره وضلعى الزاوية ب لضلعى الزاوية بَ وضلعى الزاوية ج لضلعى الزاوية جَ ولوحظ ما تقدم فى النظرية الرابعة والثلاثون لتحصل

ا = اَ او ا + اَ = قائمتين

ب = بَ او ب + بَ = قائمتين

ج = جَ او ج + جَ = قائمتين

فيكون ا ج د = ج ا ب + ا ب ج وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

اولا ان كل مثلث مجموع زواياه يساوي قائمتين

اي ان مجموع الزوايا ا و ب و ج يساوي قائمتين

(برهانه) ان يقال يلزم من كون الزاوية ا ج د = ا + ب ان يكون ا ج د + ا ج ب = ا + ب + ا ج ب ويلزم من كون مجموع المتجاورتين ا ج د و ا ج ب مساويا لقائمتين ان يكون ا + ب + ا ج ب = قائمتين فتبين بهذا ان كل مثلث مجموع زواياه يساوي قائمتين

وثانيا انه اذا علم من مثلث زاويتان كل على حدتها او مجموعهما علمت الثالثة بطرح المعلوم من مقدار القائمتين لانها متممة لمجموعهما

وثالثا انه اذا ساوت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر كل لنظيره كانت الزاوية الثالثة من المثلث الاول مساوية لنظيرتها من الثاني وكان المثلثان متساويي الزوايا المتناظرة

اي اذا كانت الزاوية ا = للزاوية اَ والزاوية ب = للزاوية بَ

كانت الزاوية ج مساوية للزاوية جَ

(برهانه) ان يقال يلزم من كون ا + ب + ج = قائمتين

و اَ + بَ + جَ = قائمتين ان يكون ا + ب + ج =

اَ + بَ + جَ فاذا طرح من الطرف الاول ا و ب ومن الثاني

اَ و بَ بقي ج = جَ وهو المطلوب

ورابعا انه اذا ساوى مجموع زاويتين من مثلث مجموع زاويتين من مثلث آخر بدون ان تكون كل واحدة منهما مساوية لنظيرتها كانت الزاوية الثالثة من المثلث الاول مساوية للثالثة من الثاني وفي هذه الحالة لا يكون المثلثان متساويي الزوايا المتناظرة

وخامسا

لكن قد سبق استحالة وجود المتساويات الثلاث الاخر فلم يبق الا ان ا = ا
ب = ب و ح = ح وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة والثلاثون المطوية شكل ٤٢)

كل شكل كثير الاضلاع محدب مجموع زواياه الداخلة يساوي من القوائم عدد اضلاعه الا اثنين مضروبا باقي طرحه في اثنين اي ان اي شكل كثير الاضلاع محدب مثل المسبع ا ب ج د ه و ز مجموع زواياه الداخلة يساوي من القوائم عدد اضلاعه الا اثنين مضروبا باقي طرحه في اثنين اي
(٧ — ٢) × ٢ = ٥ × ٢ = ١٠ قوائم •

(برهانه) ان يقال ان اقطار هذا الشكل المارة من رأس زاوية واحدة تقسمه الى مثلثات مجموع زواياها يساوي مجموع زواياه ولا يخفى ان عدد اضلاعه يزيد عن عدد تلك المثلثات ضلعين لان كل مثلث يشتمل على ضلع من اضلاع الشكل ما عدا المثلثان المتطرفان فان كلا منهما اشتمل على ضلعين

ويتضح من هذه النظرية

اولا ان مجموع الزوايا الداخلة من اي شكل رباعي محدب يساوي
(٤ — ٢) × ٢ = ٢ × ٢ = ٤ قوائم فان كانت تلك الزوايا متساوية كانت كل واحدة منها قائمة وهذه الحالة في المربع المستطيل

وثانيا ان مجموع الزوايا الداخلة من اي شكل خماسي محدب يساوي
(٥ — ٢) × ٢ = ٣ × ٢ = ٦ قوائم فان كان متساوي الزوايا كان مقدار اي زاوية من زواياه خمس الست قوائم أو ستة اخماس القائمة وبهذه الكيفية يتعين مقدار زاوية اي شكل متساوي الزوايا عدد اضلاعه معين

(تنبيهان)

الاول اذا رمز بالحرف م لعدد اضلاع شكل محدب كان مجموع زواياه

ويلزم من كون مجموع زوايا المثلث مساويا لقائمتين ان يكون مجموع زوايا المثلثين مساويا لاربع قوائم ويلزم من هذا ان لا تكون الزاوية ا متممة للزاوية اَ والزاوية ب متممة للزاوية بَ والزاوية ح متممة للزاوية حَ في آن واحد اذ لو كانت كذلك للزم ان يكون مجموع زوايا المثلثين مساويا لست قوائم وهو محال بل لا يمكن ان تكون زاويتان من زوايا احد المثلثين متممتين لنظيرتيهما من المثلث الآخر في آن واحد لانهما لو كانتا كذلك للزم ان يكون مجموع الزوايا الاربع المذكورة مساويا لاربع قوائم ويلزم من هذا انعدام الزاوية الثالثة من احد المثلثين وانعدام نظيرتها من المثلث الآخر وهو محال فتبين بهذا انه لا بد من ان يكون في احد المثلثين زاويتان كل منهما مساوية لنظيرتها من الآخر ويلزم من هذا ان تكون الثالثة من احدهما مساوية لنظيرتها كذلك وهو المطلوب

(الدعوى الثامنة والثلاثون النظرية)

اذا تعامدت الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة

(برهانه) ان قال لو رمز لزوايا احد المثلثين بالحروف ا و ب و ح ولزوايا المثلث الآخر بالرموز اَ و بَ و حَ وفرض ضلعي الزاوية ا عمودين على ضلعي الزاوية اَ كل على نظيره وكذا ضلعي الزاوية ب على ضلعي الزاوية بَ وضلعي الزاوية ح على ضلعي الزاوية حَ ولوحظ ما تقدم في النظرية الرابعة والثلاثون لحصل

ا = اَ أو ا + اَ = قائمتين

ب = بَ أو ب + بَ = قائمتين

ح = حَ او ح + حَ = قائمتين

لكن

ونشير للزوايا الخارجة بالرموز بَ و حَ و دَ و هـَ و وَ فيكون

بَ + حَ + دَ + هـَ + وَ = ٤ قوائم

(برهانه) لانه يقال لزم ان يكون ب + بَ = قائمتين و ح + حَ

= قائمتين و د + دَ = قائمتين و هـ + هـَ = قائمتين

و + وَ = قائمتين ان يكون مجموع الزوايا الداخلة والخارجة

مساويا للقوائم بعدد ضعف عدد اضلاع الشكل وقد تقدم في النظرية التاسعة

والثلاثين ان مجموع الزوايا الداخلة من اى شكل مستقيم الاضلاع محدثه

يساوى قوائم بعدد ضعف عدد اضلاعه الا اربعة فاذن يكون مجموع الزوايا

الخارجة مساويا لاربع قوائم وهو المطلوب

وهاك جدولا يبين فيه عدد اضلاع الاشكال من المثلث الى ذي العشرين

وما تساويه مجموع زواياها الداخلة ومجموع زواياها الخارجة ومجموع زواياها

الداخلة والخارجة معا

الداخلة مبينا بهذا القانون (م − ٢) × ٢ = ٢ م −
اعنى ان اى شكل مستقيم الاضلاع محدب مجموع زواياه يساوى قوائم
عددها هو ضعف عدد اضلاعه الا اربعة
الثانى ان هذه الدعوى لا تنطبق على اى شكل غير محدب

(الدعوى الاربعون المطربة شكل لط)

اذا مدت اضلاع مثلث الى اتجاه واحد بحيث لا تكون خارجه تقابل داخلة
كان مجموع الزوايا الحادثة مساويا لاربع قوائم
اى اذا مد الضلع ب ح على استقامته جهة ح والضلع ح ى جهة ى
والضلع ى ب جهة ب ورمز للزوايا الحادثة بالرموز بَ و حَ و ىَ
يكون بَ + حَ + ىَ = ٤ قوائم
(برهانه) ان يقال يلزم من كون ب + بَ = قائمتين و ح +
حَ = قائمتين و ى + ىَ = قائمتين ان يكون
ب + ح + ى + بَ + حَ + ىَ = ٦ قوائم ويلزم من
هذا ان يكون
بَ + حَ + ىَ = ٦ قوائم − (ب + ح + ى) لكن ب
+ ح + ى = قائمتين فيكون بَ + حَ + ىَ = ٦ قوائم
− قائمتين = اربع قوائم وهو المطلوب

(الدعوى الحادية والاربعون المطربة شكل م)

اذا مدت اضلاع شكل مستقيم الاضلاع محدب الى اتجاه واحد بحيث
لا تكون خارجة تقابل داخلة كان مجموع الزوايا الخارجة الحادثة مساويا
لاربع قوائم
اى اذا مد الضلع ب ح على استقامته جهة ح والضلع ح و جهة و
والضلع و هـ جهة هـ والضلع هـ ى جهة ى والضلع ى ب جهة

كما علمت حدها الاول ٦ واساسها ٢
وان مجموع زواياها الخارجة ثابت لا يتغير عن الاربع قوائم

(الدعوى الثانية والاربعون المطرية شكل ٤٤)*

قطر المتوازي الاضلاع يقسمه الى مثلثين متساويين
اي ان متوازي الاضلاع مثل ا ب ج د ينقسم بالقطر د ب مثلا الى
مثلثين ا ب د و د ب ج متساويين
(برهانه) ان يقال يلزم من كون المستقيمين ا ب و ج د متوازيين
ومقطوعين بالقاطع د ب ان تكون الزاويتان المتبادلتان ا ب د
و ب د ج متساويتين وكذا يلزم من كون المستقيمين ا د و ب ج
متوازيين ومقطوعين بالقاطع د ب ان تكون الزاويتان المتبادلتان ا د ب
و د ب ج متساويتين وحيث ان الضلع د ب مشترك بين المثلثين ا ب د
و د ب ج يكونان متساويين (كما تقدم اثباته في المطرية السابعة) *
وينتج من هذه المطرية *
اولا ان الاضلاع المتقابلة في اي شكل متوازي الاضلاع متساوية
وثانيا ان الزوايا المتقابلة في اي شكل متوازي الاضلاع متساوية
وثالثا انه اذا ساوى ضلعان وزاوية بينهما من شكل متوازي الاضلاع
ضلعين آخرين وزاوية بينهما من شكل آخر متوازي الاضلاع تساوت بقية
اجزاء احدهما بقية اجزاء الآخر كل بنظيره
ورابعا انه اذا تساوى ضلعان متجاوران من شكل متوازي الاضلاع كانت
اضلاعه كلها متساوية
وخامسا انه اذا كانت احدى زوايا متوازي الاضلاع قائمة كانت زواياه
كلها كذلك

(الدعوى الثالثة والاربعون المطرية شكل ٤٥)

كل شكل رباعي تساوت اضلاعه المتقابلة فهو متوازي الاضلاع
اي اي شكل رباعي مثل ا ب ج د اذا كان فيه الضلع ا ب مساويا لمقابله

عدد اضلاع الاشكال	مجموع زواياها الداخلة	مجموع زواياها الخارجة	مجموع زواياها الداخلة والخارجة معا
٣	٢	٤	٦
٤	٤	٤	٨
٥	٦	٤	١٠
٦	٨	٤	١٢
٧	١٠	٤	١٤
٨	١٢	٤	١٦
٩	١٤	٤	١٨
١٠	١٦	٤	١٠
١١	١٨	٤	٢٢
١٢	٢	٤	٢٤
١٣	٢٢	٤	٢٦
١٤	٢٤	٤	٢٨
١٥	٢٦	٤	٣٠
١٦	٢٨	٤	٢٢
١٧	٣٠	٤	٣٤
١٨	٣٢	٤	٣٦
١٩	٣٤	٤	٣٨
٢٠	٣٦	٤	٤

بالتامل في هذا الجدول نشاهد انه يتركب من عدد اضلاع الاشكال
سلسلة عددية تصاعدية حدها الاول ٣ واساسها واحد
وانه يتركب من مجموع زواياها الداخلة متوالية عددية تصاعدية حدها
الاول ٢ واساسها ٢
وانه يتركب من مجموع زواياها الداخلة والخارجة معا متوالية عددية

تصاعدية

بعد ثبت هذا ان الاضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية فاذن يكون الشكل المذكور متوازي الاضلاع وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة والاربعون المطرية شكل ٤٥)

قطرا المتوازي الاضلاع ينصفان بعضهما

اى ان متوازى الاضلاع مثل ا ب ح د اذا وصل قطراه ا ح و ب د كانت نقطة تقاطعهما في منتصف كل منهما اعني يكون اه = هح

به = هد

(برهانه) انه لما يلزم من كون الشكل متوازي الاضلاع ان يكون الضلعان المتقابلان اب و دح متساويين ومتوازيين ويلزم من كونهما متوازيين ان تكون الزاويتان المتبادلتان ا ب د و ب د ح متساويتين وان تكون الزاويتان المتبادلتان ب ا ح و ا ح د متساويتين وقد ثبت في المطرية السابعة ان المثلثين اللذين بهذه المثابة متساويان ويلزم من تساوي هذين المثلثين ان يكون اه = هح و به = هد وهو المطلوب

(تنبيهان)

الاول قطرا المعين ينصفان بعضهما عمادا لانه يلزم من كون الضلع اب = اد والضلع به = هد والضلع اه مشتركا ان يكون المثلث ابه = للمثلث اهد ويلزم من تساوي هذين المثلثين ان تكون الزاويتان بها و اهد متساويتين ويلزم من كونهما متجاورتين ومتساويتين ان يكون المستقيم اح عمودا على المستقيم بد وهو المطلوب

الثاني كل شكل رباعي تساوت اضلاعه فاقطاره تنصف زواياه وتنصف بعضها اعمادا

(الدعوى السادسة والاربعون المطرية شكل ٤٦)

قطرا المستطيل متساويان

دج والضلع اد مساو ومقابل لـ بج فيكون متوازي الاضلاع ابج
د فيكون الضلع اب موازيا للضلع دج والضلع اد موازيا للضلع
بج

(برهانه) ان يقال لو وصل القطر دب لكان المثلثان الحادثان ابد و دبج متساويين لان الضلع دب مشترك بينهما والضلع اب = للضلع دج بالفرض والضلع اد = للضلع بج كذلك كما في (النظرية الحادية عشر) ويلزم من تساوي هذين المثلثين ان تكون الزاوية ابد = بدج والزاوية ادب = دبج ويلزم من كون المتبادلتين ابد و بدج متساويتين ان يكون المستقيمان اب و دج متوازيين ومن تساوي المتبادلتين ادب و دبج ان يكون المستقيمان اد و بج متوازيين فقد ثبت هنا ان الاضلاع المتقابلة متوازية كما هي متساوية فاذن يكون الشكل المذكور متوازي الاضلاع وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة والاربعون النظرية شكل ٤٤)

اذا كان الضلعان المتقابلان في الشكل الرباعي متساويين ومتوازيين كان الضلعان الآخران كذلك ويكون الشكل المذكور متوازي الاضلاع

اي اذا كان الضلعان المتقابلان مثل اب و جد من الرباعي ابجد متساويين ومتوازيين كان الضلعان الآخران اد و بج متساويين ومتوازيين وكان الشكل ابجد متوازي الاضلاع

(برهانه) ان يقال لو وصل القطر دب لكان المثلثان الحادثان ابد و دبج متساويين لان الضلع دب مشترك والضلع اب = للضلع دج بالفرض والزاوية ابد = بدج بالتبادل لكون اب و دج متوازيين وقد ثبت في النظرية السادسة ان المثلثين اللذين بهذه المثابة متساويان ويلزم من تساوي هذين المثلثين ان يكون الضلع اد = للضلع بج وان تكون الزاوية ادب = للزاوية دبج وحيث ان الزاويتين ادب و دبج متبادلتان يكون الضلعان اد و بج متوازيين

فقد

للمثلث ا هـ د كما اثبت ذلك (فى المطلوبة السادسة)

ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان يكون هـ و = ا د وحيث ان الشكل الرباعى هـ و ب د متوازى الاضلاع يكون هـ و = د ب ويلزم من هذا ان يكون ا د = د ب وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال يلزم من تساوى المثلثين ا هـ د و هـ ج و ان يكون هـ د = ج و ومن توازى اضلاع الرباعى هـ و ب د ان يكون هـ د = و ب ويلزم من هذا ان يكون ج و = و ب وان يكون هـ د = ج ب / ٢ وهو المطلوب

- (الدعوى السابعة والاربعون المطلوبة شكل ص)

اى شكل شبيه المنحرف اذا رسم من وسط احد ضلعيه المنحرفين مستقيم يوازى احدى القاعدتين المتوازيتين اى الضلعين المتوازيين فاعلم

اولا ان هذا المستقيم يمر بوسط الضلع الآخر

وثانيا ان المستقيم المذكور يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين

اى ان اى شكل شبيه المنحرف مثل ا ب ج د اذا مد من النقطة و التى هى وسط ضلعه د ج غير الموازى للضلع ا ب مستقيم مثل و هـ يوازى احدى القاعدتين المتوازيتين ا د و ب ج فاعلم

اولا ان المستقيم و هـ يمر بوسط الضلع الآخر ا ب اى يكون ا هـ = هـ ب

وثانيا ان المستقيم و هـ يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين ا د و ب ج اى يكون و هـ = (ا د + ب ج) / ٢

(برهان القضية الاولى) ان يقال لو وصل قطر الشكل مثل ا ج لحدث مثلثان ا د ج و ا ج ب اما الاول وهو ا د ج ففيه د و = و ج بالفرض و و ح يوازى ا د كذلك فيلزم ان يكون ا ح = ح ج وان يكون و ح = ا د / ٢ واما الثانى وهو ا ج ب ففيه ا ح = ح ج و ح هـ يوازى ج ب فيلزم ان يكون ا هـ = هـ ب وهو المطلوب

اى ان المستطيل مثل اب ح ى قطراه مثل اح و ب ى متساويان *
(برهانه) ان يقال يلزم من كون الضلع اب مشتركا فى المثلثين اب ى و اب ح والضلع اى = للضلع ب ح والقائمة ى اب = اب ح ان يكون المثلثان المذكوران متساويين ويلزم من تساويهما ان يكون القطران اح و ب ى متساويين وهو المطلوب

(تنبيهات)

الاول قطرا المربع متساويان كما ان قطرى المستطيل كذلك
الثانى قطرا المربع ينصفان زواياه وينصفان بعضهما اعمادا كما ان قطرى المعين كذلك
الثالث الشكل الرباعى يكون متوازى الاضلاع اذا كان كل من قطريه منصفا للآخر

(الدعوى السابعة والاربعون النظرية شكل مز)

اذا نصف احد اضلاع مثلث بنقطة ومد منها مستقيم يوازى احد الضلعين الباقيين فاعلم اولا انه يمر بوسط الضلع الثالث وثانيا انه يكون مساويا لنصف الضلع الموازى له
اى اذا نصف ضلع مثل اح من المثلث اح ب بنقطة مثل ه ومد منها مستقيم مثل ه ى يوازى الضلع ح ب فاعلم اولا انه يمر بوسط الضلع الثالث اب اعنى يكون اى = ى ب وثانيا انه يكون مساويا لنصف ح ب اعنى يكون ه ى = $\frac{ح ب}{٢}$

(برهان القضية الاولى) ان يقال لو مد من النقطة ه مستقيم مثل ه و يوازى الضلع اب لحدث مثلث ه ح و يساوى المثلث اه ى لانه يلزم من توازى المستقيمين ح ب و ه ى ان تكون الزاويتان المتناظرتان ح و اه ى متساويتين ومن توازى المستقيمين اب و ه و ان تكون الزاويتان المتناظرتان ح ه و و ا متساويتين ومن المعلوم ان الضلع ح ه = للضلع ه ا بالفرض فيكون المثلث ه ح و =

للمثلث

بوسطى قطريه ويكون مساويا لنصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين
وثانيا ان المستقيم المحصور بين وسطى قطريه يكون مساويا لنصف فاضل
قاعدتيه المتوازيتين انظر (شكل مح)
لانه لو وصل المستقيم ء ط ومد على استقامته جهة ط حتى لاقى حب
في ى لحدث مثلث ء حى فيه رط يوازى حى و ء ر =
ر ح فيكون رط = $\frac{حى}{٢}$ وحيث ان و ط = $\frac{اء}{٢}$ يكون $\frac{حى}{٢}$
= $\frac{اء}{٢}$ او حى = اء وحيث ان ب ى = ب ح ـ ى ح
يكون ب ى = ب ح ـ اء
ويلزم من كون ح ط موازيا للضلع ب ح و ى ح = ح ب ان
يكون ح ط = $\frac{ب ى}{٢}$ فاذن يكون
ح ط = $\frac{ب ح ـ اء}{٢}$ وهو المطلوب

(الدعوى الحادية والستون المطوية شكل ل)

الشكل الرباعي يكون متوازي الاضلاع اذا كانت زواياه المتقابلة
متساوية
اى ان الشكل الرباعي مثل ا ب ح ء يكون متوازى الاضلاع اذا كانت
زواياه المتقابلة ا و ح و ب و د متساوية
(برهانه) ان يقال حيث ان مجموع الزوايا الداخلة من اى شكل رباعي
مجدد يساوى اربع قوائم يكون
ا + ح + ب + د = ٤ قوائم وحيث ان
ا = ح بالفرض و ب = ء كذلك يكون
٢ ح + ٢ ب = ٤ قوائم ويلزم من هذا ان يكون
ح + ب = قائمتين وحيث كان مجموع المتحادتين الداخلتين ح
و ب مساويا لقائمتين يكون المستقيمان اب و ح ء متوازيين وبمثل
هذا نبرهن على أن اء و ب ح متوازيان وهو المطلوب
تمت المقالة الاولى بحمد الله وعونه

(برهان القضية الثانية) ان يقال يلزم من كون وح = $\frac{اك}{٢}$ و حهـ = $\frac{حـ}{٢}$ ان يكون وح + حهـ = $\frac{اك}{٢}$ + $\frac{حـ}{٢}$ اى وهـ = $\frac{اد+حـ}{٢}$ وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة والاربعون المطرية شكل مو)

المستقيم المار بوسطى ضلعى مثلث يوازى ضلعه الثالث اى ان المستقيم هد المار بوسطى الضلعين اح و اب من المثلث احب يوازى ضلعه الثالث حب

(برهانه) ان يقال لو مد من النقطة هـ مستقيم هو يوازى اب لحدث مثلث هحو مساو للمثلث اهد لان حهـ = هـا بالفرض والزاوية حهو = للزاوية ا بالتناظر و دو = اد كما تقدم وثبت فى المطرية السادسة ان المثلثين اللذين بهذه المثابة متساويان ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان تكون الزاوية ح = للزاوية اهد ويلزم من كونهما متناظرتين ومتساويتين ان يكون المستقيمان هد و حب متوازيين وهو المطلوب

(الدعوى الخمسون المطرية شكل مز)

اى شكل شبه المنحرف المستقيم المار بوسطى ضلعيه المنحرفين يوازى كلا من قاعدتيه المتوازيتين

اى ان اى شكل شبه المنحرف مثل ابحد المستقيم هر المار بوسطى ضلعيه غير المتوازيين اب و دح يوازى كلا من قاعدتيه المتوازيتين اد و بح

(برهانه) ان يقال لو وصل احد قطرى الشكل مثل دب ونصف بنقطة مثل ح ومد منها مستقيم يوازى كلا من القاعدتين المتوازيتين اد و بح لمر بوسطى الضلعين اب و دح

وينتج من هذه المطرية

اولا ان المستقيم المار بوسطى ضلعى شبه المنحرف غير المتوازيين يمر ايضا

(المقالة الثالثة)

(في بيان الدائرة ومقادير الزوايا)

(حدود)

(حد ١) (شكل ٤٦) محيط الدائرة خط منحنٍ جميع نقطه على ابعاد مساوية من نقطة داخله تسمى مركزا

والدائرة سطح مستوٍ يحيط به هذا الخط المنحني

(حد ٢) نصف القطر مستقيم ممتد من المركز الى المحيط مثاله م ا من (الشكل ٤٦)

والقطر مستقيم يمر بالمركز وينتهي بطرفيه الى المحيط مثاله ا م ب من (الشكل ٤٦) ومقتضى تعريف محيط الدائرة تكون انصاف الاقطار كلها متساوية وكذلك الاقطار ويتضح من تعريف محيط الدائرة ان النقطة التي يكون بعدها عن المركز اكبر من نصف القطر تكون خارجة عن المحيط والتي بعدها عن المركز اصغر من نصف القطر تكون داخل الدائرة

(حد ٣) القوس جزء من المحيط مثاله ب ح د من (الشكل ٤٦)

والوتر مستقيم يصل بين طرفي القوس مثاله ب د من (الشكل ٤٦)

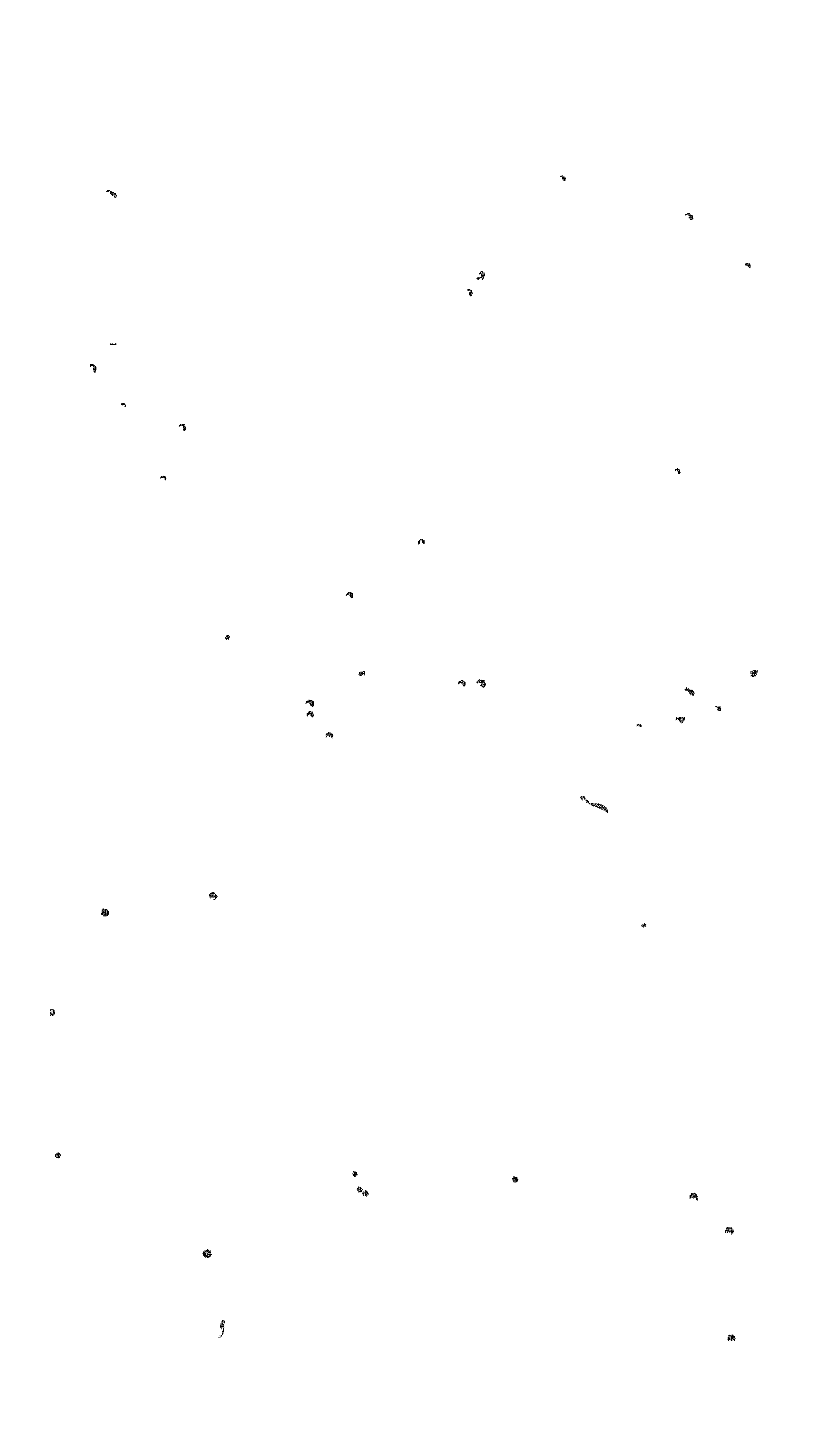
(حد ٤) قطعة الدائرة جزء منها محاط بقوس ووتر مثالها القطعة [illegible] او القطعة [illegible] من (الشكل ٥١)

(تنبيه)

اعلم ان الوتر الواحد انما ينسب عند الاطلاق للقوس الاصغر وان كان موافقا للقوسين والقطعتين الكبرى والصغرى

(حد ٥) قطاع الدائرة جزء من الدائرة محاط بقوس ونصفي قطرين واصلين الى نهايتي ذلك القوس مثاله ا م ح او ه م د او د م ب من (الشكل ٤٦)

(حد ٦) (شكل ٤٧) المستقيم الداخل ما كان مرسوما داخل الدائرة ومنتهيا بنقطتين من محيطها مثاله المستقيم ا ب من (الشكل ٤٧)



كل مستقيم قسم المحيط الى جزءين متساويين يكون قطرا اى ان كل مستقيم مثل ا ب يقسم المحيط ام ب د فى النقطتين ا و ب الى جزئين متساويين يكون قطرا

(برهانها) ان يقال لو لم يكن ا ب قطرا لكان مركز المحيط كالنقطة و مثلا خارجا عنه ويلزم منه ان يكون المستقيم ا و ك مثلا هو القطر ويلزم من كونه قطرا أن يكون ا م ك نصف المحيط ويلزم منه ان يكون الجزء ا م ك مساويا للكل ا م ك ب وهو محال فيلزم ان يكون المركز على المستقيم ا ب اى ان ا ب هو القطر وهو المطلوب اثباته (شكل ٩٤ الثانى)

(الدعوى الثانية النظرية شكل ٤٩)*

كل وتر اصغر من القطر

اى ان كل وتر مثل ا د فهو اصغر من القطر

(برهانها) ان يقال لو وصل من طرفى الوتر ا د نصفا قطرين ا و و د و لحدث مثلث ا و د اى ضلع من اضلاعه اصغر من مجموع الضلعين الآخرين

ومن المعلوم ان احد اضلاعه هو الوتر وهو اصغر من مجموع نصفى القطرين وهذا المجموع يساوى قطرا كاملا فحينئذ يكون الوتر اصغر من القطر

(نتيجه)

ينتج من هذه النظريه ان اكبر خط مستقيم يمكن رسمه فى الدائرة يساوى قطرها

(الدعوى الثالثة النظرية شكل ٣ من ٢)

اى مستقيم قاطع لا يمكن ان يقطع محيط الدائرة فى اكثر من نقطتين

(برهانها) ان يقال لو فرض ان مستقيما مثل ص ص يقطع محيطا كالذى مركزه و فى ثلاث نقط مثل ا و ب و ح لا يمكن توصيل انصاف اقطار مثل او و وب و وح ولو فرض ان النقطة م هى وسط الوتر ا ب والنقطة مَ وسط الوتر ب ح ثم وصل وم و ومَ للزم ان يكون

الزاوية الداخلية زاوية رأسها بالمحيط وضلعاها وتران مثالها الزاوية ب ا ح من (الشكل ٤٧)

المثلث الداخلي مثلث رؤسه بالمحيط مثاله المثلث ب ا ح من (الشكل ٤٧) ويقال للدائرة حينئذ خارجية عنه اى مرسومة عليه

كثير الاضلاع الداخلي شكل رؤسه بالمحيط ويقال للدائرة حينئذ خارجة عنه بالمعنى المتقدم

(حد ٧) القاطع مستقيم يقطع محيط الدائرة فى نقطتين مثاله المستقيم ا ب من (الشكل ٤٨)

(حد ٨) المستقيم المماس لمحيط الدائرة هو مستقيم لا يشترك مع المحيط الا فى نقطة واحدة مثاله المستقيم ح ى من (الشكل ٤٨) ونقطة المماس هى نقطة الاشتراك مثالها م

(حد ٩) الدائرتان المتماستان دائرتان لا يشترك محيطاهما الا فى نقطة واحدة

(حد ١٠) كثير الاضلاع الخارجي ما كانت جميع اضلاعه مماسة للمحيط مثاله كلم الخ من (الشكل ١٦٠) وحينئذ يقال للدائرة داخليه عنه اى مرسومة داخله

(دعاوى)

(الدعوى الاولى النظرية شكل ٤٩)

كل قطر ينصف الدائرة والمحيط

اى ان كل قطر مثل ا ب يقسم الدائرة والمحيط الى جزئين متساويين

(برهانها) ان يقال لو جعل القطر ا ب فصلا مشتركا وطبق الشكل ا هـ ب على الشكل ا و ب لانطبق الخط المنحنى ا هـ ب على الخط المنحنى ا و ب انطباقا كليا والا لكان فى احدهما نقط ابعادها عن المركز غير متساوية وهذا مخالف لتعريف محيط الدائرة

(تنبيه)

[illegible] دائرة واحدة او في دوائر متساوية [illegible]

الآخر

والزوايا [illegible] القوس [illegible] عن نصف

[illegible]

اي اذا كان [illegible]

[illegible]

اذا كان [illegible] يكون القوس [illegible]

[illegible]

(برهان الدعوى الاولى) ان قال احد [illegible] او القوس

[illegible] لكان الوتر [illegible] او [illegible]

[illegible]

[illegible] الزاوية [illegible] الزاوية [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] الوتر [illegible]

[illegible]

[illegible]

([illegible])

اعلم اذا [illegible] والقوس [illegible]

[illegible] (الشكل [illegible]) [illegible]

[illegible] القوس [illegible] والوتر [illegible] الوتر [illegible]

*(الدعوى السادسة النظرية شكل ٥١)

القطر العمود على وتر ينصفه وقوسه [illegible]

دم عمودا على اب و دمَ عمودا على بح لان كلا من المثلثين
المتساويين اوب و بوح متساوي الساقين ويلزم من هذا امكان تنزيل
عمودين دم و دمَ على المستقيم بص وهو محال

(الدعوى الرابعة المطربة شكل ٥٠)

الاقواس المتساوية اوتارها متساوية والاوتار المتساوية اقواسها متساوية
سواء كان ذلك في دائرة واحدة او دوائر متساوية والدوائر المتساوية
ما كانت انصاف اقطارها متساوية

اى اذا كان القوس اطد مساويا للقوس هحح يكون الوتر اد
مساويا للوتر هح وبالعكس اى اذا كان الوتر اد مساويا للوتر هح
يكون القوس اطد مساويا للقوس هحح

(برهان القضية الاولى) ان يقال يلزم من كون القطر اب مساويا للقطر
هو ان يمكن تطبيق نصف الدائرة اطدب على نصف الدائرة
هحح و ويلزم من هذا ان يتحد الخط المنحنى اطدب بالخط المنحنى
هحح و اتحادا كليا وحيث ان الجزء اطد مساو للجزء هحح
بالفرض تقع النقطة د على النقطة ح فاذن يكون الوتر اد مساويا
الوتر هح وهو المطلوب

(برهان القضية الثانية) ان يقال لو وصل نصفا القطرين رد و رح
فالمثلثان ارد و هرح اضلاعهما المتناظرة متساوية اعنى ار
= هر و رد = رح و اد = هح ويلزم من هذا ان يكونا
متساويين ويلزم من تساويهما ان تكون الزاوية ارد مساوية للزاوية
هرح فلو طبق نصف الدائرة ادب على مساويه هحو لوقع نصف
القطر رد على نصف القطر رح لان الزاوية ارد = هرح
ووقعت النقطة د على النقطة ح فاذن يكون القوس اطد مساويا
للقوس هحح وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة المطربة شكل ٥٠)

[illegible] ترد في [illegible] الخامسة والثلاثين من الثالثة الاولى ان العمود [illegible] القائم

على منتصف قطعة مستقيمة يلاقي العمود المقام على المستقيم الآخر

واستدل على ان نقطة تقاطع العمودين هي المركز حيث كانت نقطة

التقاطع منطبقة على نقطة العمود [illegible]

[illegible] النقطة ا ولكن [illegible] العمود [illegible]

النقطة [illegible] على النقطة [illegible] المحيط الذي مركزه ط المار

ط ونصف قطره ط [illegible] المثلث ا ب جـ [illegible] المطلوب

تقدم [illegible] ان كل ثلاث نقط ليست على مستقيم [illegible] ان [illegible]

دائرة

وليس ان عدم امكان مرور محيط آخر بالنقط المذكورة يماثل لو امكن امرار

محيط آخر بالنقط المذكورة للزم ان يكون مركزه على العمود [illegible] لانه

لو كان [illegible] العمود [illegible] الاصل [illegible] الى [illegible]

[illegible] يلزم ان يكون المركز على العمود [illegible]

حينئذ يكون المركز على كلا العمودين [illegible] لا يمكن

ان يتقاطع الخطان المستقيمان الا في نقطة واحدة يلزم ان يكون المركز واحدا

اي ان [illegible] وهو المطلوب

(نتيجة)

يتضح من هذه النظرية انه لا يمكن ان [illegible] تمس [illegible]

[illegible] ثلاث نقط مشتركة لاتحد مركزهما [illegible]

[illegible] محيط واحد

(الدعوى السادسة [illegible] النظرية شكل ٥١)

الوتران المتساويان بعدهما عن المركز متساويان والوتران غير المتساويين

اكبرهما اقربهما من المركز

اي ان الوترين المتساويين مثل اب و جـد بعداهما عن المركز هـ و

هـ ز متساويان وان الوترين غير المتساويين مثل اب و اح اكبرهما

بان القائمتان ... العمود ... مثل ا ... وقوسه اد
تكون اد = دب والقوس اد = القوس دب
(برهان الحالة الاولى) ان يقال لو وصل نصفا القطر ن اح و حب
... الثلث اح ب متساوي الساقين لان نصف القطر اح = حب
... الطريقة الثانية عشر في الحالة الاولى ان العمود النازل من
راس المثلث المتساوي الساقين على قاعدته ينصفها وقد تقدم هذا ان البعد
اد = دب وهو المطلوب
(وبرهان الحالة الثانية) ان يقال لو وصل الوتران اد و دب لكان
... لانه يلزم من كون د عمودا على اب والد اد = دب
... المثلثان اد = دب ويلزم من كون الوتر اد = دب ان
... القوس اد = القوس دب وهو المطلوب
(تنبيه)
اعلم ان المستقيم المار بالمركز ح وبوسط الوتر اب ووسط القوس
... يكون عمودا على الوتر المذكور وحيث ان شرطين من هذه الشروط
كافيان ... مستقيم ... فلذا كل مستقيم ... شرطان
من هذه الشروط لا بد وان يوجد به الشرطان الاخران فحينئذ العمود
المار بوسط الوتر يمر بالمركز وبوسط القوس الموتر به والمستقيم المار بالمركز
... يكون عمودا على وسط وتر ... القوس وهكذا
(الدعوى السادسة المطلوبة شكل ٥٢ السابق)
كل ثلاث نقط ليست على مستقيم يمكن ان يمر بها محيط دائرة لا اثنان
اى ان كل ثلاث نقط مثل ا و ب و ح ليست على مستقيم يمكن ان يمر
بها محيط دائرة لا محيطان
(برهانها) ان يقال لو وصل المستقيمان با و اح ونصف المستقيم با
بنقطة مثل ى ونصف المستقيم اح بنقطة مثل ع واقيم ىهـ عمودا
على اب وا ... عمودا على اح لالتقى العمودان ىهـ و عط

جه لكان جه مائلا على د ب ولم يكن
نصف القطر ج ا وان تكون النقطة هـ
لا يوجد من المستقيم د ب نقطة مشتركة مع
مماس للمحيط في النقطة ا
ن ان يقال ليكن المستقيم د ب مماسا للمحيط
دون اى نقطة من نقطه ما عدا النقطة ا خارجة
ل من المركز ج الى احدى نقط المستقيم د ب
مثل جه يكون ج ا < جه ويلزم من هذا
الى د ب وهو المطلوب

ما ينتج من هذه المطلوبه
ن نقطة موضوعة على محيط دائرة لا يمر بها الا مستقيم
ان عدمها اذ لو امكن ان يمر بها كل منهما عمودا على
ه المماس ويلزم ان اكثر من واحد عمودا على
واحد وقد تقدم انه محال فحينئذ لا يمكن ان يمر
المحيط الا مماس واحد وهو المطلوب
ان من نقطة المماس على الخط المماس يمر بالمركز
ل من المركز على الخط المماس يمر بنقطة المماس
المماسين المتحدين من نهايتي قطر دائرة متوازيان
الخط المذكور
المماسين اذا كانا متوازيين يكون الوتر الواصل بين
قطرا لان القطر العمود على احد المماسين يكون
عمودا فاذن يمر بنقطتي التماس
المماس لمحيط دائرة والمار بنهايتي وتر غير انه لم

مستقيم ان مماسان لا يكون المستقيم المار بنقطتي

البعد هما عن المركز

(برهان القضية الاولى) ان يقال لو نصف ا [illegible] بالعمود حو و الوتر
ده بالعمود [illegible] ووصل الخطين ا د [illegible] فيحدث مثلثان
قائما الزاوية [illegible] متساويان لان الوتر [illegible] = [illegible] والضلع
او الذي هو نصف [illegible] يساوي الضلع [illegible] الذي هو [illegible]
ده ويلزم من تساويهما ان الضلع [illegible] هو مساو للضلع
[illegible] وهو المطلوب فقد ثبت ان الوترين المتساويين [illegible] عن المركز
متساويان

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال اذا كان [illegible] اكبر من [illegible]
فيكون [illegible] اكبر من القوس [illegible]
ولو [illegible] القوس [illegible] = [illegible] ووصل [illegible]
[illegible] والعمود [illegible] والعمود حط على [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] وحيث ان المماثل [illegible] اكبر [illegible]
[illegible] يكون [illegible] اكبر [illegible]
[illegible] = [illegible] الوتر [illegible] = [illegible]
[illegible] الوتر [illegible] [illegible]
وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة المطلوبة [illegible])

[illegible] المقام على [illegible] مماسا لمحيط الدائرة في [illegible]
المذكورة [illegible] نقطة التماس [illegible] يكون عمودا [illegible]
الخط المماس

اي ان العمود [illegible] المقام على نهاية نصف قطر مثل [illegible] يكون مماسا
لمحيط الدائرة في النقطة ا وان نصف القطر [illegible] المار بنقطة التماس ا
يكون عمودا على الخط المماس [illegible]

(برهان القضية الاولى) ان يقال لو اخذ على المستقيم [illegible] نقطة مثل [illegible]

الى اصلين

(مقدمتان)

النقطتان المتماثلتان بالنسبة لمستقيم نقطتان موضوعتان على عمود واحد على هذا المستقيم وبعداهما عن موقع العمود متساويان والمستقيم المذكور يسمى محور التماثل

(الدعوى الحادية عشر النظرية شكل ٥٦ رسم ا)

اذا كان لمحيطي الدائرتين نقطة مشتركة خارجة من المستقيم المار بمركزيهما فلا بد وان يكون لهما نقطة اخرى مشتركة مماثلة للاولى بالنسبة لمستقيم المركزين اى اذا كان لمحيطي الدائرتين نقطة مشتركة مثل ا خارجة عن المستقيم دَدَ المار بمركزيهما د و دَ فلا بد وان يكون لهما نقطة اخرى مشتركة مثل اَ مماثلة للاولى ا بالنسبة لمستقيم المركزين ددَ

(برهانها) ان يقال حيث كان ااَ عمودا على ددَ و اب = اَب يكون اَد = اد و دَاَ = دَا ويلزم من هذا ان يمر المحيط الذى مركزه د ونصف قطره دا بالنقطة اَ وان يمر المحيط الذى مركزه دَ ونصف قطره دَا بالنقطة اَ كذلك

ما ينتج من هذه النظرية

ينتج منها اولا انه اذا تقاطع محيطا دائرتين فالمستقيم المار بمركزيهما يكون عمودا على وسط الوتر المشترك

وثانيا انه اذا تماس محيطا دائرتين فنقطة التماس تكون على المستقيم المار بمركزيهما اذ لو كانت خارجة عنه للزم ان يشترك المحيطان فى النقطة المماثلة لها ويلزم من هذا تقاطعهما

(الدعوى الثانية عشر النظرية شكل ٥٦ رسم ب)

اذا كان محيطا دائرتين خارجين عن بعضهما كان البعد بين مركزيهما اكبر

التماس قطرا

(الدعوى العاشرة النظرية شكل ٥٥ و ٥٦)

القوسان المحصوران من المحيط بين مستقيمين متوازيين متساويان

اى ان القوسين مثل طك و حل المحصورين من المحيط بين مستقيمين متوازيين مثل اب و ده متساويان •

ولهذه الدعوى ثلاث حالات

الاولى ان يكون المستقيمان المتوازيان قاطعين للمحيط فحينئذ برسم نصف القطر مع عمودا على الوتر طب فيكون ايضا عمودا على موازيه كل فاذا تكون النقطة ع وسط كل من القوسين طعب و كعل ويلزم من هذا ان يكون القوس طع = للقوس عب والقوس كع = للقوس عل وحيث ان الاشياء المتساوية اذا طرحت منها اشياء متساوية كانت البواقي متساوية يكون

طع — كع = عب — عل اى ان القوس طك = لب •

وهو المطلوب

الثانية ان يكون احد المتوازيين قاطعا والآخر مماسا كما في (الشكل ٥٦) فنوصل من المركز ونقطة التماس ع نصف القطر مع فيكون عمودا على المماس ده وعلى موازيه طب فيلزم من هذا ان تكون النقطة ع وسط القوس طعب وهو المطلوب

الثالثة ان يكون المستقيمان المتوازيان مماسين للمحيط كما في (الشكل ٥٦) فرسم القاطع اب موازيا لهما فعلى ما ذكر في الحالة الثانية تكون القوس طع = عب والقوس طعَ = عَب ويلزم من هذا ان يكون القوس عطعَ = للقوس عبعَ وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا فصل المستقيمان من المحيط قوسين متساويين كانا متوازيين ويشترط في هذا ان يكون كل من القوسين في جهة واحدة بالنسبة لكل من المستقيمين

عين قطبين لحدث مثلث اضلاعه البعد بين المركزين د ح ونصف القطر
ح ا ونصف القطر ح ا وقد ثبت في المقالة الاولى ان اى ضلع من اى مثلث
اصغر من مجموع الضلعين الاخرين واكبر من فاضلهما فلابد ان يكون البعد بين
المركزين اصغر من مجموع نصفى القطرين واكبر من فاضلهما وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم ان لكل من الطريقة الثانية عشر والثالثة عشر والرابعة عشر
والخامسة عشر والسادسة عشر عكس صحيح بهل البرهنة اى اذا كان البعد
بين المركزين اصغر من مجموع نصفى القطرين واكبر من فاضلهما يتقاطع
المحيطان لانهما لو لم يتقاطعا لكانا اما خارجين او داخلين او مماسين في الخارج
او مماسين في الداخل فان كانا خارجين يلزم ان يكون البعد بين المركزين اكبر
من مجموع نصفى القطرين وان كانا داخلين يلزم ان يكون البعد بين المركزين
اصغر من فاضل نصفى القطرين وان كانا متماسين في الخارج يلزم ان يكون
البعد بين المركزين مساويا لمجموع نصفى القطرين وان كانا متماسين في الداخل
يلزم ان يكون بعد المركزين مساويا لفاضل نصفى القطرين وكل ذلك خلاف
المفروض فحينئذ يتقاطع المحيطان وهو المطلوب

(الدعوى السابعة عشر الطريقة شكل ٦١)

الزوايا المركزية المتساوية اقواسها متساوية وبالعكس اى الاقواس المتساوية
زواياها المركزية متساوية سواء كان ذلك في دائرة واحدة او في دوائر متساوية
اى اذا كانت الزاوية المركزية ا و ب مساوية للزاوية المركزية ى ح هـ
يكون القوس ا ب مساويا للقوس ى هـ وبالعكس اى اذا كان القوس
ا ب مساويا للقوس ى هـ تكون الزاوية المركزية ا و ب مساوية للزاوية
المركزية ى ح هـ

(برهان القضية الاولى) ان يقال لو طبقت الزاوية ا و ب على مساويتها
ى ح هـ لوقعت النقطة ا على النقطة ى والنقطة ب على النقطة هـ

من مجموع نصفي قطريهما

(برهانها) ان يقال حيث ان د ح = د ا + ح آ + ا آ يكون
د ح > د ا + ح آ وهو المطلوب

(الدعوى الثالثة عشر المطرية شكل ٥٦ دص ح)

اذا كان احد محيطي الدائرتين داخلا في دائرة المحيط الآخر بدون ان يتلاقيا
كان البعد بين مركزيهما اصغر من فاضل نصفي قطريهما

(برهانها) ان يقال يلزم من كون د ح = د ا − ح آ − ا ا
ان يكون د ح < د ا − ح آ وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة عشر المطرية شكل ٥٩)

اذا تماس محيطا دائرتين من خارج كان البعد بين مركزيهما مساويا لمجموع
نصفي قطريهما

(برهانها) ان يقال يلزم من كون نقطة التماس ا على المستقيم المار
بالمركزين ان يكون د ح = د ا + ا ح وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة عشر المطرية شكل ٦٠)

اذا تماس محيطا دائرتين في الداخل كان البعد بين مركزيهما مساويا لفاضل
نصفي قطريهما

(برهانها) انه يلزم من كون نقطة التماس ا على المستقيم المار
بالمركزين ان يكون د ح = د ا − ح ا وهو المطلوب

(الدعوى السادسة عشر المطرية شكل ٦٠ الثاني)

اذا تقاطع محيطا دائرتين كان البعد بين مركزيهما اصغر من مجموع نصفي
قطريهما واكبر من فاضلهما

(برهانها) ان يقال لو وصل بين احدى نقطتي التقاطع مثل ا والمركزين د ح

مستقيما

و دس و سه متشابهة لتساوى الزوايا المركزيه ا د و و د ر
و رح و ح ط و ط ى و ى ك و ك ب وكذلك
الزوايا المركزية ى ل و ل ك و ه س و س ه ويلزم من هذا
ان تكون نسبة القوس الكامل اب الى القوس الكامل ى ه كنسبة
٧ الى ٤ وان تكون
نسبة الزاوية ا د ب الى الزاوية ى د ه كالقوس اب الى القوس ى ه
وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا كانت النسبة بين القوسين اب و ى ه كالنسبة بين عددين صحيحين
كانت النسبة بين الزاويتين ا د ب و ى د ه كالنسبة بين العددين
المذكورين وحينئذ تكون
نسبة القوس اب : القوس ى ه الزاوية ا د ب : الزاوية
ى د ه لانه يلزم من تساوى القسى الجزئية ا ر و ر ح و ح ط الخ
و ى ل و ل ك الخ تساوى الزوايا الجزئية ا د ر و ر د ح و ح د ط الخ
و ى د ل و ل د ك الخ

(الدعوى التاسعة عشر المطرية شكل ١١)

النسبة بين الزاويتين المركزيتين تساوى النسبة بين قوسيهما سواء كان ذلك
في دائرة واحدة او في دوائر متساوية

اى ان النسبة بين الزاويتين المركزيتين ا د ب و ا د ى تساوى النسبة
بين قوسيهما اب و ا ى على اى حالة كانت سواء كان ذلك في دائرة
واحدة او في دوائر متساوية

اى ان نسبة الزاوية ا د ب : الزاوية ا د ى : القوس اب :
القوس ا ى

(برهانها) ان يقال لو لم تكن هذه المتناسبة صحيحة لكان حدها الرابع اما اكبر
من القوس ا ى او اصغر منه فان كان اكبر من القوس ا ى بان كان

ويلزم من هذا ان يقع القوس ا ب على القوس د هـ فاذن يكونان متساويين وهو المطلوب

(وُ رهان العكسية الثانية) ان يقال لولم تكن الزاوية ا ج ب مساوية الزاوية د و هـ لكانت اما اكبر منها او اصغر منها فلو كانت الزاوية ا ج ب اكبر من الزاوية د و هـ بان أخذ من الزاوية الكبرى زاوية مثل ا م و مساوية للزاوية د و هـ لكان القوس أوْ مساويا للقوس د هـ بمقتضى ما سبق وقد فرض ان القوس ا ب مساو للقوس د هـ يلزم ان يكون القوس أو مساويا للقوس ا ب ويلزم من هذا ان يكون الجزء مساويا للكل وهو محال فقد ثبت من هذا انه لا يمكن ان تكون الزاوية ا ج ب اكبر من الزاوية د و هـ وبمثل هذا البرهان على انه لا يمكن ان تكون الزاوية ا ج ب اصغر من الزاوية د و هـ وبه يثبت أن الزاوية ا ج ب مساوية للزاوية د و هـ وهو المطلوب

* (الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ٦٢) *

اذا كانت النسبة بين الزاويتين المركزيتين كالنسبة بين عددين صحيحين كانت النسبة بين قوسيهما مساوية للنسبة المذكورة سواء كان ذلك في دائرة واحدة او في دوائر متساوية

اي اذا كانت النسبة بين الزاويتين المركزيتين ا ج ب و د و هـ كالنسبة بين عددين صحيحين كانت النسبة بين قوسيهما ا ب و د هـ مساوية للنسبة المذكورة اعني تكون

نسبة الزاوية ا ج ب : الزاوية د و هـ :: القوس ا ب : القوس د هـ سواء كان ذلك في دائرة واحدة او في دوائر متساوية

(برهانها) ان يقال لو جعلت زاوية مثل الزاوية م مقياسا مشتركا وفرض ان الزاوية ا ج ب تشتمل على الزاوية م سبع مرات وان الزاوية د و هـ تشتمل على الزاوية م اربع مرات لكانت الاقواس ا و و ر و ر ح و ح ط و ط ك و ك ت و ت ب وكذلك الاقواس د ل و ل د

تقاس بالقوس المحصور بين ضلعيها

ولتسهيل هذه المقارنة يقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ جزءاً متساوية تسمى
درجات وكل درجة الى ٦٠ دقيقة وكل دقيقة الى ١٠ ثانية وهكذا
فاذا كان القوس المحصور بين ضلعي زاوية مركزية محتوياً على ٢٤ درجة
فمقياس هذه الزاوية يكون $\frac{٢٤}{٣٦٠}$ اي $\frac{١}{١٥}$

(تنبيه)

النسبة بين قطعتين من دائرة واحدة او في دوائر متساوية كالنسبة بين قوسيهما

(الدعوى العشرون الثانية شكل ٦٤ و ٦٥)

كل زاوية محيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها

اي ان كل زاوية محيطية مثل الزاوية ب أ د تقاس بنصف القوس ب د
المحصور بين ضلعيها

(برهانها) ان نقول لنفرض المركز ج واقعاً بين ضلعي الزاوية ب أ د
كما في (الشكل ٦٤) ونصل القطر ا [illegible] ونصل الشعاع ب ج
فمن اجل ان الزاوية ب ج هـ الخارجة عن المثلث ب أ ج مساوية
لمجموع الزاويتين ب أ ج و ج ب أ وحيث ان الضلع ج أ يساوي الضلع
ج ب تكون الزاوية ج ب أ = الزاوية ب أ ج ويلزم من هذا ان تكون
الزاوية ب ج هـ ضعف الزاوية ب أ ج وبما ان الزاوية المركزية ب ج هـ
تقاس بالقوس ب هـ يلزم من ذلك ان الزاوية ب أ هـ تقاس بنصف
القوس ب هـ وبمثل هذا يبرهن على ان الزاوية هـ أ د تقاس بنصف القوس
هـ د فينتج من هذا ان الزاوية الكلية ب أ د تقاس بنصف القوس الكلي
ب هـ د وهو المطلوب

ولنفرض المركز ج خارجاً عن الزاوية ب أ د كما في (الشكل ٦٥) ثم
نصل القطر أ هـ فالزاوية د أ هـ قياسها نصف القوس د هـ
والزاوية ب أ هـ قياسها نصف القوس ب هـ ويلزم من هذا ان تقاس
الزاوية ب أ د التي هي فاصل الزاويتين ب أ هـ و د أ هـ بنصف فاضل

مساويا القوس او مثلا لكانت

نسبة الزاوية ا د ب : الزاوية ا د هـ . القوس ا ب . القوس ا و

ولو تصورنا ان القوس ا ب مقسوم الى اقسام متساوية كل منها اصغر من القوس د و لوقعت احدى نقط التقاسيم مثل النقطة ٤ بين النقطة د والنقطة و ولو وصل نصف القطر ح هـ لكانت النسبة بين القوسين ا ب و ا هـ كالنسبة بين عددين صحيحين وحينئذ تكون

نسبة الزاوية ا د ب : الزاوية ا د هـ : القوس ا ب . القوس ا هـ ولو قورنت هذه المناسبة بالمناسبة المتقدمة لحدث

نسبة الزاوية ا د ى . الزاوية ا د هـ . القوس ا و القوس ا هـ وحيث ان الحد الاول من هذه المناسبة اصغر من تاليه يلزم ان يكون الحد الثالث اصغر من تاليه ويلزم من هذا ان يكون الكل اصغر من الجزء وهو محال فقد ثبت بهذا انه لا يمكن ان تكون

نسبة الزاوية ا د ب : الزاوية ا د ى : القوس ا ب . قوس اكبر من ا ى وبمثل هذا ايبرهن على انه لا يمكن ان تكون

نسبة الزاوية ا د ب الزاوية ا د ى : القوس ا ب . قوس اصغر من القوس ا ى وحينئذ تكون

نسبة الزاوية ا د ب : الزاوية ا د ى : القوس ا ب . القوس ا ى وهو المطلوب

(في قياس الزوايا)

قياس كمية هو البحث عن النسبة بين هذه الكمية والوحدة التي من نوعها فاذا جعلت الزاوية القائمة وحدة كان مقدار اي زاوية عبارة عن النسبة بين هذه الزاوية والزاوية القائمة

وحيث تبين من النظرية المتقدمة انه يمكن ابدال النسبة بين اي زاويتين مركزيتين بالنسبة بين قوسيهما فلا مانع من مقارنة قوس الزاوية المركزية بربع المحيط بدل مقارنتها بالزاوية القائمة وهذا معنى قولهم ان الزاوية المركزية

(الدعوى الثانية والعشرون المطلوبة شكل ٦٩ الثاني)

كل زاوية رأسها بين المركز والمحيط تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها مضافا اليه نصف القوس المحصور بين امتدادي ضلعيها

اى ان كل زاوية مثل ا ح ب رأسها بين المركز والمحيط تقاس بنصف القوس ب ح المحصور بين ضلعيها مضافا اليه نصف القوس هـ و المحصور بين امتدادي ضلعيها

(برهانها) ان يوصل الوتر هـ ح فتكون الزاوية ب ا ح الخارجة عن المثلث ا ح هـ مساوية لمجموع الزاويتين الداخلتين ا هـ ح و هـ ح ا وحيث ان الزاوية ا هـ ح تقاس بنصف القوس ب ح والزاوية هـ ح ا تقاس بنصف القوس هـ و ينتج ان الزاوية ب ا ح تقاس بنصف القوس ب ح مضافا اليه نصف القوس هـ و وهو المطلوب.

(الدعوى الثالثة والعشرون المطلوبة شكل ٦٩ الثالث)

كل زاوية رأسها خارجة عن المحيط تقاس بنصف القوس المقعر رأسها المحصور بين ضلعيها مطروحا منه نصف القوس المحدب المحصور كذلك بينهما

اى ان كل زاوية رأسها خارجة عن المحيط مثل الزاوية ب ا ح تقاس بنصف القوس ب ح المقعر نحو رأسها المحصور بين ضلعيها مطروحا منه نصف القوس د هـ المحدب المحصور كذلك بينهما

(برهانها) ان يوصل الوتر د ب فتكون الزاوية ا = ح د ب – د ب ا وحيث ان الزاوية ح د ب تقاس بنصف القوس ح ب والزاوية د ب ا تقاس بنصف القوس د هـ ينتج ان الزاوية ا تقاس بنصف القوس ح ب – نصف القوس د هـ وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا كان احد ضلعي الزاوية قاطعا والآخر مماسا او كلاهما مماسا لمحيط الدائرة فلا تزال هذه المطلوبة صحيحة والبرهان واحد

(الدعوى الرابعة والعشرون المطلوبة شكل ٦٨)

القوس ب هـ و د هـ

فقد ثبت بهذا ان كل زاوية محيطية تقاس بنصف القوس المحصورة بين ضلعيها

* (نتائج) *

ينتج من هذه النظرية اولا ان الزوايا المحيطية مثل ب أ ح و ب د ح الخ المرسومة فى قطعة واحدة متساوية لان نصف القوس ب و ح مقياس لكل من تلك الزوايا كما فى (الشكل ٦٦)

وثانيا ان الزاوية المرسومة فى نصف الدائرة مثل الزاوية ب أ د كما فى (الشكل ٦٧) تكون قائمة لانها تقاس بنصف نصف المحيط ب و د اى ربع المحيط

وثالثا ان الزاوية المرسومة فى قطعة اكبر من نصف الدائرة مثل الزاوية ب أ ح من (الشكل ٦٦) تكون حادة لانها تقاس بنصف القوس ب و ح الاقل من نصف المحيط

ورابعا ان الزاوية المرسومة فى قطعة اصغر من نصف الدائرة مثل الزاوية ب و ح من (الشكل ٦٦) تكون منفرجة لانها تقاس بنصف القوس ب أ ح الاكبر من نصف المحيط

* (الدعوى الحادية والعشرون السارية شكل ٦٩) *

الزاوية الحادثة من مماس ووتر تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها

اى ان الزاوية الحادثة من مماس ووتر مثل الزاوية ب أ ح تقاس بنصف القوس أ م د ح المحصور بين ضلعيها

(برهان) ان يوصل القطر أ د المار بنقطة المماس أ فيكون نصف القوس أ م د معيارا للزاوية القائمة ب أ د ونصف القوس د أ ح معيارا للزاوية المحيطية د أ ح ويلزم من هذا ان يكون نصف القوس الكلى أ م د ح معيارا للزاوية الكلية ب أ ح وهو المطلوب

ويمثل هذا البرهان على ان الزاوية ح أ هـ تقاس بنصف القوس أ ح المحصور بين ضلعيها

(الدعوى السابعة العملية شكل ٧١)

اذا كان المطلوب اقامة عمود على مستقيم من نقطة معينة عليه فطريقة ذلك ان يفرض المستقيم المعلوم حـ ب والنقطة المعينة عليه أ ثم يؤخذ من المستقيم حـ ب نقطة مثل حـ على يمين النقطة أ ونقطة اخرى مثل ب على يسارها بحيث يكون البعد أ ب = للبعد أ حـ ثم يؤخذ فتحة بالبيكار اكبر من أ حـ ويركز في النقطة حـ ويرسم قوس دائرة فوق الخط حـ ب او تحته ثم يركز في النقطة ب ويرسم قوس دائرة كذلك ثم يوصل مستقيم بين نقطة تقاطع القوسين والنقطة المعينة أ فهذا المستقيم يكون هو العمود المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل حـ د , د ب لحدث مثلث متساوي الساقين وتقرر في المقالة الاولى ان المستقيم المار من رأس المثلث المتساوي الساقين الى وسط قاعدته يكون عمودا عليها

(تنبيه)

اذا علم مستقيم مثل حـ ب ونقطة معينة عليه مثل أ وكان المطلوب ان يمد من النقطة أ مستقيم يصنع مع المستقيم الاول حـ ب زاوية قائمة تعمل العملية المتقدمة بعينها

(الدعوى الثامنة العملية شكل ٧٢ الثاني)

اذا كان المطلوب انزال عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه فطريقة ذلك ان يفرض المستقيم المعلوم حـ ب والنقطة المعلومة أ ويؤخذ على حـ ب نقطتان مثل د , هـ ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر د أ ويركز في النقطة د ويرسم محيط دائرة ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر هـ أ ويركز في النقطة هـ ويرسم محيط دائرة يقاطع المحيط الاول في النقطة أ وفي نقطة اخرى مثل ن ثم يوصل مستقيم بين نقطتي التقاطع ويكون هو العمود المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية ان المستقيم هـ د المار بالمركزين هـ و د

الزاويتان المتقابلتان من كل شكل رباعي داخلي متممتان لبعضهما
اي ان مجموع الزاويتين المتقابلتين مثل ب و د من كل شكل رباعي
داخلي مثل ا ب ج د يساوي قائمتين لان الزاوية ب تقاس بنصف القوس
ا د ج والزاوية د تقاس بنصف القوس ا ب ج فيكون نصف المحيط
مقياسا لمجموع الزاويتين ب و د فاذن يكون مجموعهما مساويا لقائمتين
وهو المطلوب

وبالعكس اذا وجد في شكل رباعي مثل ا ب ج د زاويتان متقابلتان متممتان
لبعضهما كان ذلك الشكل قابلا للرسم في الدائرة
لانه لو مر محيط دائرة بالنقط الثلاث ا ب ج لكان نصف القوس ا م ج
معيارا للزاوية ب ويلزم من هذا ان يكون نصف القوس ا د ج معيارا
للزاوية د المتممة للزاوية ب وهذا لا يتأتى الا اذا كانت الزاوية د
محيطية وهو المطلوب

(في الدعاوي العملية المتعلقة بالمقالة الاولى والثانية)

*(الدعوى الاولى العملية شكل ٧٠)

اذا كان المطلوب تنصيف مستقيم محدود مثل المستقيم ا ب فطريقة ذلك
ان توجد فتحة بالبركار اكبر من نصف الخط ا ب ويركز في النقطة ا
ويرسم قوسان احدهما فوق الخط والاخر تحته ثم يركز في النقطة ب
ويرسم قوسان كذلك ثم يوصل مستقيم بين نقطة تقاطع القوسين اللذين فوق
الخط و نقطة تقاطع القوسين اللذين تحته فهذا المستقيم يكون عمودا على
وسط المستقيم المعلوم والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل ا ى و ى ب
و ب هـ و هـ ا لكان الشكل الحادث معينا وقد تقرر في المقالة الاولى
ان قطري المعين ينصفان بعضهما عموديا فقد ثبت بهذا ان البعد ا ح =
البعد ح ب

(تنبيه)

هذه العملية تستعمل لاقامة عمود على وسط مستقيم محدود

الزاوية مقام عمود الى وسط الوتر أ ب فهذا العمود ينصف الزاوية أ ه ج

(تنبيه)

يمكن بالطريقة المتقدمة ان تقسم القوس المعلوم والزاوية المعلومة الى اربعة اجزاء متساوية او ثمانية او ستة عشر وهكذا

(الدعوى السادسة العملية شكل ٥)

اذا علم مستقيم ونقطة خارجة عنه وكان المطلوب مد مستقيم يمر بالنقطة المعلومة ويوازي المستقيم المعلوم فطريقة ذلك ان يوصل المستقيم المعلوم ب ح والنقطة المعلومة أ ويؤخذ نقطة من المستقيم المعلوم كالنقطة ه ثم توصل فتحة البيكار على البعد أ ه ويركز في النقطة أ ويرسم القوس غير المحدود ه و ثم يركز في النقطة ه ويرسم القوس أ ب ويؤخذ ه ء = أ ء ثم يوصل المستقيم أ ء فيكون موازيا المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل المستقيم أ ه لظهر ان الزاويتين المتبادلتين الداخلتين أ ه و ، ه أ ء متساويتان ويلزم من هذا ان يكون المستقيمان ب ح و أ ء متوازيين

(الدعوى السابعة العملية شكل ٧)

اذا علم زاويتان من مثلث وكان المطلوب ايجاد الزاوية الثالثة فطريقة ذلك ان يفرض أ احدى الزاويتين المعلومتين رأس الزاوية الاخرى ويرسم المستقيم غير المحدود ء ه و ثم تسامت النقطة ه زاوية ء ه ح = أ وزاوية ح ه ج = ب فالزاوية الباقية ج ه و تكون الزاوية الثالثة المطلوبة لان مجموع عدد الزوايا الثلاث متساوي واضح

(الدعوى الثامنة العملية شكل ٧٧)

اذا علم من مثلث ضلعان والزاوية المحصورة بينهما وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك ان يفرض ب احد الضلعين المعلومين و ح الضلع الاخر و أ الزاوية المحصورة بينهما ويرسم المستقيم غير المحدود ء ه ثم تنشأ

عمودا على وسط الوتر المشترك اب وقد تقرر في المقالة الاولى انه اذا كان احد مستقيمين عمودا على الآخر كان الآخر عمودا عليه

(الدعوى الرابعة العملية شكل ٧٣).

اذا علمت نقطة على مستقيم معلوم وكان المطلوب مد مستقيم منها يصنع مع المستقيم المعلوم زاوية تساوي زاوية معلومة فطريقة ذلك ان تفرض النقطة المعلومة ا والمستقيم المعلوم اب والزاوية المعلومة ك فيركز في رأس الزاوية ك وتوحد فتحة بالبيكار قدر ما يراد ويرسم قوس مثل ع ل ينتهي بضلعي الزاوية ثم يركز في النقطة ا ويرسم قوس غير محدود مثل ب و ثم توحد فتحة بالبيكار قدر الوتر ل ع ويركز في النقطة ب ويرسم قوس يقطع القوس غير المحدود ب ر في نقطة مثل د ثم يوصل اد فتكون الزاوية الحادثة داب مساوية للزاوية المعلومة ك

والدليل على صحة هذه العملية ان نصف القطر اب = كع والوتر ب د = ع ل فيلزم ان يكون القوس ب د مساويا للقوس ل ع ويلزم من هذا ان تكون الزاوية باد = لكع

(الدعوى الخامسة العملية شكل ٧٤).

اذا كان المطلوب تنصيف قوس معلوم او زاوية مفروضة فطريقة تنصيف القوس المعلوم كالقوس اب ان يوصل الوتر اب ثم توحد فتحة بالبيكار اكبر من نصف الوتر اب ويركز في النقطة ا ويرسم قوسان احدهما فوق الوتر والآخر تحته ثم يركز في النقطة ب ويرسم قوسان كذلك ثم يوصل مستقيم بين نقطة تقاطع القوسين اللذين فوق الوتر ونقطة تقاطع القوسين اللذين تحته فهذا المستقيم يكون عمودا على وسط الوتر اب ومنصفا للقوس اهب

وطريقة تنصيف الزاوية المعلومة كالزاوية احب ان يركز في النقطة ح وتوحد فتحة بالبيكار بقدر ما يراد ويرسم قوس مثل اهب ينتهي بضلعي

الزاوية

(الدعوى الحادية عشر العملية شكل ٨٠ و ٨١ و ٨٢)

اذا علم من مثلث ضلعان وزاوية تقابل لاحدهما وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك ان نرسم الضلعين المعلومين ا و ب والزاوية المعلومة ح المقابلة للضلع ب ومن المعلوم ان الزاوية المعلومة ح اما ان تكون قائمة او منفرجة او حادة فان كانت قائمة او منفرجة كان [illegible] المثلث [illegible] المذكورة [illegible] زاوية [illegible] تساوي الزاوية المعلومة ح ويؤخذ ده = ا ثم يؤخذ فتحة البيكار بقدر الضلع المعلوم ب ويركز في النقطة ه ويرسم قوس يقطع الخط د و في نقطة ن ويوصل المستقيم ه ن فيكون د ه ن هو المثلث المطلوب

وان كانت الزاوية المعلومة ح حادة فان كان الضلع [illegible] ب اكبر من الضلع ا [illegible] هو المثلث المطلوب كما في (الشكل ٨١)

وان كان الضلع المقابل لها ب [illegible] ه و [illegible] = [illegible] و [illegible] واحدة [illegible] ويحدث مثلثان د ه و و د ه ع كلاهما [illegible] (الشكل ٨٢)

(تنبيه)

اعلم ان هذه المسألة يستحيل حلها في جميع الاحوال اذا كان الضلع ب اصغر من العمود النازل من النقطة ه على الخط د ن

(الدعوى الثانية عشر العملية شكل ٨٣)

اذا علم ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من شكل متوازي الاضلاع وكان المطلوب رسمه فطريقة ذلك ان يرسم احد الضلعين المعلومين ا والضلع الآخر ب والزاوية المحصورة بينهما د ثم يرسم خط د ه = ا وننشأ في النقطة د زاوية و د ه = ر ويؤخذ د و = ب

النقطة د زاوية هدو تساوى الزاوية المعلومة ا ثم يؤخذ دو = ب , دح = حـ ثم يوصل وح فيكون دوح هو المثلث المطلوب

(الدعوى التاسعة العملية شكل ٧٨)

اذا علم من مثلث ضلع وزاويتان وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك ان يقال ان الزاويتين المعلومتين اما ان تكونا مجاورتين للضلع المعلوم او احدهما مجاورة له والاخرى مقابلة له ففي هذه الحالة الاخيرة يبحث عن الزاوية الثالثة من المثلث بالطريقة المقدمة في العملية السابعة ويصير كلا الزاويتين المجاورتين للضلع معلوما وحينئذ يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه الجزء دهـ بقدر الضلع المعلوم ثم يعمل في النقطة د زاوية ادو تساوي احدى الزاويتين المجاورتين للضلع المعلوم ونعمل في النقطة هـ زاوية دهـ ح تساوي المجاورة الاخرى فيتقاطع الخطان دو , دع في نقطة مثل ح وحينئذ يكون دهـ ح هو المثلث المطلوب

(الدعوى العاشرة العملية شكل ٧٩)

اذا علم من مثلث اضلاعه الثلاث وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك ان يفرض ا احد الاضلاع الثلاث و ب الضلع الآخر و حـ الضلع الثالث فيرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه دهـ بساوي الضلع ا ثم يؤخذ فتحة البيكار بقدر الضلع الثاني ب ويركز في النقطة هـ ويرسم قوس دائرة ثم تؤخذ فتحة البيكار بقدر الضلع الثالث حـ ويركز في النقطة د ويرسم قوس دائرة يقطع القوس الاول في نقطة مثل و ثم يوصل دو , هـو فيكون دهـو هو المثلث المطلوب

(تنبيه)

يشترط في امكان حل هذه المسئلة ان يكون مجموع كل ضلعين اكبر من الثالث وفاضلهما اصغر منه

وإذا كانت النقطة المعلومة ا خارجة عن المحيط فنصل المستقيم م ا من المركز والنقطة ا وننصفه في نقطة مثل و ونرسم محيط دائرة نصف قطرها يساوي و م فهذا المحيط يقطع المحيط المعلوم في نقطتين مثل ب و ى فاذا وصل ا ب و ا ى كان كل منهما مماسا للمحيط المعلوم ومارا بالنقطة المعلومة

والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل م ب و م ى لكان كل من الزاويتين م ب ا و م ى ا قائمة لان كل منهما مرسوم في نصف الدائرة

(تنبيه)

اعلم ان المماس ا ب يساوي المماس ا ى والزاوية ب ا م تساوي الزاوية م ا ى لان المثلث ا م ب القائم الزاوية في ب يساوي المثلث ا م ى القائم الزاوية في ى لان الوتر ا م مشترك والضلع م ب يساوي الضلع م ى

(تمرين)

ينتج من هذه العملية طريقة لرسم ...

(الدعوى الخامسة عشر العملية شكل ٨٢ و ٨٧ ثان)

اذا اعطي مثلث كالمثلث ا ب ح وكان المطلوب رسم دائرة داخلة فيه فطريقة ذلك ان تنصف الزاوية ا بالمستقيم ا و والزاوية ب بالمستقيم ب و فالنقطة و التي هي ملتقى المنصفين تكون مركز الدائرة المطلوبة فاذا انزلنا من النقطة و اعمدة و ك و ر و ه و ن على اضلاع المثلث فهذه الاعمدة تكون متساوية كما تقرر في المقالة الاولى وحينئذ المحيط الذي مركزه النقطة و ونصف قطره احد الاعمدة يكون مماسا لاضلاع المثلث المعلوم

(تنبيهان)

الاول حيث ان بعد النقطة و عن الضلع ب ح كبعدها عن الضلع ا ح تكون على المستقيم المنصف للزاوية ا ح ب

ونرسم قوساً مركزه النقطة د ونصف قطره ق ع = د ب
ويقطع الآخر النقطة هـ ونصف قطره ه ع = ى ب ونوصل ق ع
و هـ ع ويكون ى هـ ع ق هو المتوازي الاضلاع المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية ان الاضلاع المتقابلة متساوية كل وقد تقرر في المقالة الاولى ان الشكل الرباعي اذا تساوت اضلاعه المتقابلة كان متوازي الاضلاع ومن المعلوم ان هذا الشكل قد اشتمل على جميع المسئلة بشروطها

(تنبيه)

اذا كانت الزاوية المفروضة قائمة وكان الضلعان المعطيان غير متساويين كان الشكل الحادث مستطيلا وان كانا متساويين كان مربعا

(الدعوى الثالثة عشر العملية شكل ٨٤)

اذا كان المطلوب تعيين مركز دائرة او قوس معلوم فالطريقة لذلك ان يؤخذ على المحيط او على القوس ثلاث نقط مثل ا و ب و ج ويوصل ا ب و ب ج بالخطين او بالوترين ثم يقام عمود ى هـ على وسط ا ب وعمود ق ع على وسط ب ج فالنقطة ن التي هي ملتقى العمودين المذكورين هي المركز المطلوب

(تنبيه)

بهذه الطريقة يستعمل لرسم محيط دائرة يمر بالنقط الثلاث ا و ب و ج المعلومة وقد تستعمل ايضا لرسم محيط دائرة يكون المثلث المعلوم ا ب ج داخله

(الدعوى الرابعة عشر العملية شكل ٨٥)

اذا كان المطلوب رسم مستقيم يمس محيط دائرة معلومة ويمر بنقطة معينة فالطريقة لذلك ان يقال اذا كانت النقطة المعلومة ا على المحيط يوصل نصف القطر ج ا ويقام العمود ا ى على ج ا فيكون ا ى هو المماس المطلوب

ن القطعة ام ب مساوية للزاوية المعلومة ج

(تنبيه)

علومة قائمة كانت القطعه المطلوبة نصف دائرة قطرها

يد المتوكل على ربه المعيد المبدى على عزت افندى
الرياضية والطبيعيه بمدرسة المهندسخانه الخديويه

ويعلم من ذلك ان الخطوط المستقيمة المنصفة لزوايا مثلث تتقاطع في نقطة واحدة

الثاني اذا مد الخطان المنصفان لزاويتين خارجتين من مثلث كالزاويتين م ب ح و ب ح د فنقطة تقاطعهما و تكون مركز الدائرة مماسة للضلع ب ح ولامتدادي الضلعين الآخرين من المثلث واذا مد الخطان المنصفان للزاويتين ل ب ا و ب ا س فنقطة تقاطعهما وَ تكون مركز الدائرة مماسة للضلع ب ا ولامتدادي الضلعين الآخرين من المثلث

ولو مد الخطان المنصفان للزاويتين ع ا ح و ا ح ص لكانت نقطة تقاطعهما وً مركز الدائرة مماسة للضلع ا ح ولامتدادي الضلعين الآخرين من المثلث

فحينئذ يمكن ان يرسم اربع دوائر تمس ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة

(الدعوى السادسة عشر العملية شكل ٨٨ و ٨٩)

اذا علم مستقيم مثل ا ب وزاوية مثل ح وكان المطلوب ان يرسم على المستقيم ا ب قطعة دائرة كل زاوية مرسومة فيها مساوية للزاوية المعلومة ح فطريقة ذلك ان يمد المستقيم ا ب جهة د ثم تنشأ في النقطة ب زاوية د ب هـ = ح ويقام ب و عمودا على ب هـ و ع و عمودا على وسط ا ب ثم تؤخذ فتحة بالبركار بقدر و ب وبركز في النقطة و التي هي ملتقى العمودين وترسم دائرة فتكون القطعة ا م ب هي المطلوبة

والدليل على صحة هذه العملية ان الخط ب ن مماس لكونه عمودا على نهاية نصف القطر و ب ويلزم من هذا ان يكون نصف القوس ا ك ب معيارا للزاوية ا ب ن وللزاوية المحيطية ا م ب فاذن تكون الزاوية ا م ب = ا ب ن = هـ ب د = ح ويلزم من هذا ان تكون

(دروس فى المقالة الثالثة)

المقالة الثالثة يبحث فيها عن مساحة الاشكال المستقيمة الاضلاع وعن
خواص الاشكال المتشابهة

(الحدود)

(حد ١) مساحة الشئ تعيين مافيه من امثال الوحدة الخطية او اجزائها
ان كان الشئ خطا او امثال مربعها كذلك ان كان سطحا او امثال مكعبها
كذلك ان كان جسما

(حد ٢) الشكلان المتكافئان شكلان متساويان فى المساحة سواء
كانا متشابهين او غير متشابهين فالدائرة مثلا يمكن ان تكافئ مربعا كما ان
المثلث يمكن ان يكافئ مستطيلا او مربعا او دائرة او شكلا مخمسا
او مسدسا او نحو ذلك

ولا يكون الشكلان متساويين الا اذا امكن انطباق احدهما على الآخر
انطباقا كليا كالدائرتين المرسومتين ببعدين متساويين وكالمثلثين ذوى
الاضلاع المتناظرة المتساوية

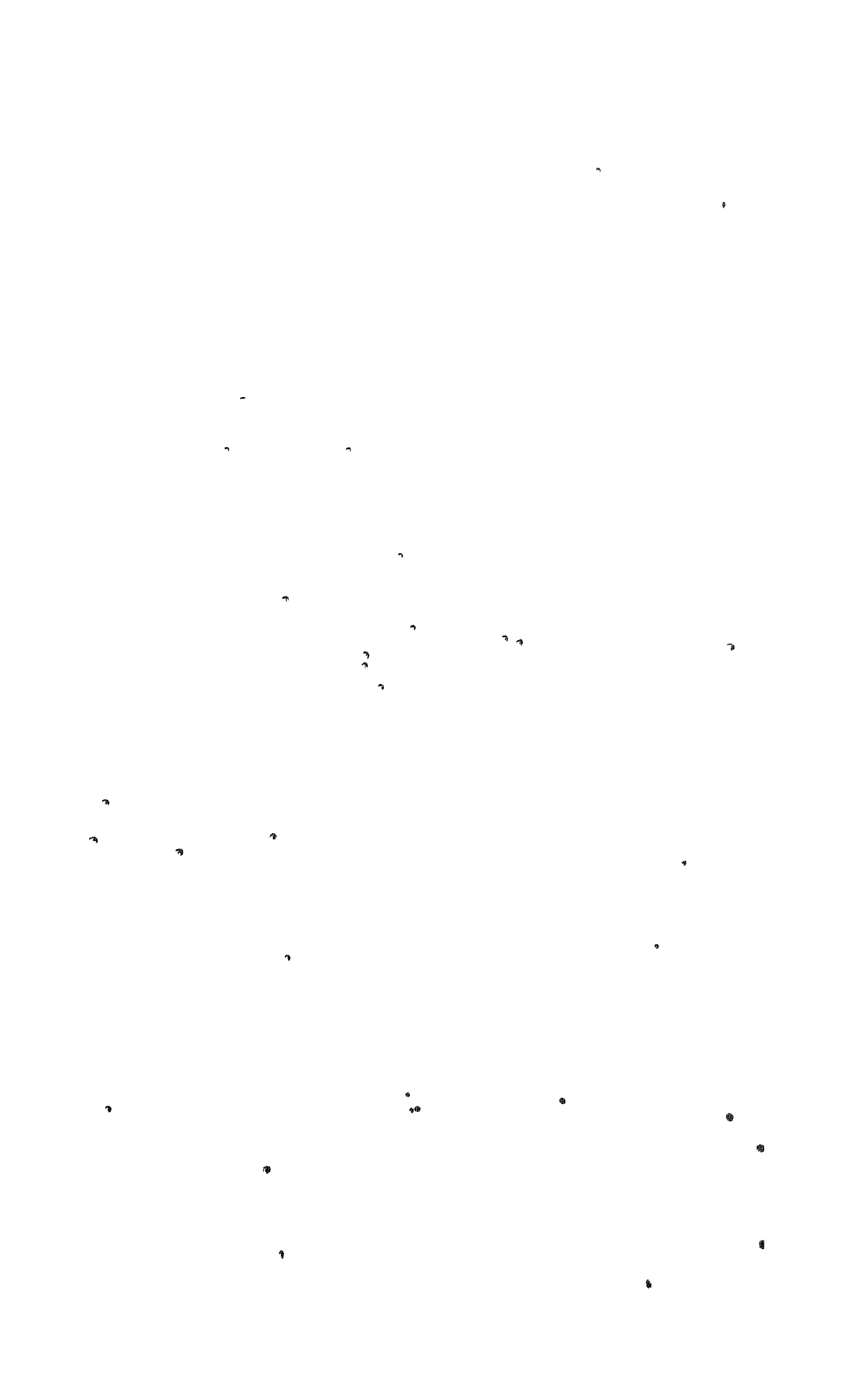
(حد ٣) ارتفاع متوازى الاضلاع هو كما فى (الشكل ٩٣) العمود مثل
هو المحصور بين ضلعين متقابلين مثل اب و حد ماخوذين قاعدتين له

(حد ٤) ارتفاع المثلث هو كما فى (الشكل ٩٤) العمود مثل اد
النازل من رأس زاوية من زواياه مثل ا على الضلع المقابل لها مثل ب ح
الماخوذ قاعدة له

(حد ٥) ارتفاع شبه المنحرف هو كما فى (الشكل ٩٥) العمود مثل
هو المحصور بين الضلعين المتوازيين مثل اب و حد المأخوذين
قاعدتين له

(الدعوى الاولى المطربة شكل ٩٩ و ١٠٠)

نسبة المستطيلين المتحدى الارتفاع الى بعضهما كنسبة قاعدتيهما
فالمستطيلان مثل اب حد و اهوى المتحدان فى الارتفاع اى نسبة



مثل ب ء ك على ا ب يحدث مستطيل ا ء ك ى فيلزم ان تكون
نسبة المستطيل ا ب ر ى ٠ المستطيل ا ء ك ى :. ا ب ا ت
لان بين القاعدتين ا ب و ا ء متناسا مشتركا
وحيث ان المقدمات المساطرة متساوية فى هاتين التناسبتين يتركب من
التوالى متناسبة هى

ا هـ ى ى ٠ ا ء ك ى :. او : ا ء

وحيث ان الحد الاول من هذه المتناسبة اصغر من الحد الثانى يلزم ان يكون
الحد الثالث اصغر من الحد الرابع والواقع هنا عكسه فلا تكون هذه المناسبه
صحيحة وحيث انها ناتجة من متناسبتين يكون الغلط فى احداهما او فيهما
معا وحيث ان المتناسبة الثانية

ا ب ر ى . ا ء ك ى .: اَ : ا ء صحيحة بالبرهان السابق

يكون الغلط حاصلا فى المتناسبة الاولى

ا ب ر ى : ا هـ ى ى .. ا ب . او حينئذ الحد الرابع لا يمكن
ان يكون اكبر من القاعدة ا هـ
وبمثل هذا يبرهن على ان الحد الرابع لا يمكن ان يكون اصغر من القاعدة ا هـ
حينئذ تكون نسبة المستطيلين المحدى الارتفاع الى بعضهما كنسبة
قاعدتيهما وهو المطلوب اثباته

(الدعوى الثانية النظرية شكل ١٠١)

نسبة اى مستطيلين الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول
فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه
فاذا رمز بالحرف س لمستطيل قاعدته ق وارتفاعه ع وبالحرف
ص لمستطيل آخر قاعدته قَ وارتفاعه عَ يكون س : ص

$$: ق \times ع : قَ \times عَ$$

(برهانه) ان يتصور مستطيل ثالث مثل م قاعدته تساوى قاعدة

احدهما الآخر القاعدة أب القاعدة اهـ

(برهانها) ان يفرض اولا ان بين القاعدتين أب و اهـ مقياسا مشتركا

مثل م بحيث تكون

القاعدة اب = ٧ م مثلا

والقاعدة اهـ = ٤ م

ويكون اب : اهـ : ٧ م : ٤ م وبجعل م = ١ يكون

اب اهـ :: ٧ : ٤

فاذا اقسمنا القاعدة اب الى سبعة اجزاء متساوية كانت القاعدة اهـ

محتوية على اربعة اجزاء منها واذا اقمنا من كل نقطة من نقط التقاسيم عمودا على

اب انقسم المستطيل ابحد الى سبعة مستطيلات متساوية لان

قواعدها متساوية وارتفاعاتها كذلك

ومن حيث ان المستطيل اهود يحتوى على اربعة مستطيلات منها تكون

نسبة المستطيل ابحد : المستطيل اهود :: ٧ . ٤

فينتج من مقارنة هذه المناسبة بالمناسبة السابقة التى هى القاعدة اب

القاعدة اهـ :: ٧ : ٤ ان

نسبة المستطيل ابحد : المستطيل اهود :: القاعدة اب .

القاعدة اهـ وهو المطلوب

وثانيا انه اذا لم يكن بين القاعدتين اب و اهـ مقياس مشترك تكون

نسبة المستطيل ابحد : المستطيل اهود :: القاعدة اب .

القاعدة اهـ

لانه لو لم تكن هذه المناسبة صحيحة لكان الحد الرابع اما اكبر من القاعدة

اهـ او اصغر منها

فلو فرضناه اكبر من اهـ بان جعلناه مثل او لكان ابحد

: اهود :. اب . او فلو قسمنا القاعدة اب الى اقسام

متساوية بشرط ان يكون القسم الواحد اصغر من البعد هـ و لوقعت

بالاقل نقطة من نقط التقاسيم مثل ى بين هـ و و اذا اقمنا عمودا

مثل

اربع مرات

والعادة ان تقاس السطوح بمربع الوحدة الخطية اى بالمربع الذى ضلعه يساوى وحدة الطول

فاذا جعل المتر وحدة للطول يكون المتر المربع وحدة للسطوح واذا كان الذراع وحدة للطول يكون الذراع المربع وحدة للسطوح وهكذا وحيث ان مربع الواحد واحد ينتج من ذلك ان نسبة اى مستطيل الى مربع الوحدة الخطية كنسبة حاصل ضرب قاعدة المستطيل المذكور فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة المربع فى ارتفاعه وحيث ان قاعدة مربع الوحدة الخطية تساوى الوحدة الخطية وارتفاعه كذلك تكون المتناسبة هكذا

$$\frac{\text{المستطيل}}{\text{المربع}} = \frac{\text{حاصل ضرب القاعدة فى الارتفاع}}{1 \times 1}$$

اعنى ان مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه وحينئذ المستطيل الذى قاعدته ق = ٣٫٥٣م وارتفاعه ع = ٢٫٢٥م مساحته = ٣٫٥٣م × ٢٫٢٥م = ٧٫٩٤٢٥ امتار مربعة أو ٢٥ سنتمترا مربعا و ٩٤ ديسمترا مربعا و ٧ امتار مربعة

(الدعوى الثالثة النظرية شكل ١٠١ ثانى)

مساحة المثلث القائم الزاوية تساوى نصف حاصل ضرب احد الضلعين المحيطين بزاويته القائمة فى الآخر

فالمثلث ا ب ح القائم الزاوية فى ب مساحته تساوى نصف حاصل ضرب ا ب فى ب ح اى $\frac{\text{ا ب} \times \text{ب ح}}{٢}$

لاننا اذا تممنا المستطيل الذى قاعدته ب ح وارتفاعه ا ب نشاهد ان هذا المستطيل ضعف المثلث ا ب ح وحيث ان مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه ينتج ان مساحة المثلث ا ب ح تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه وهو المطلوب اثباته

المستطيل الاول وارتفاعه يساوى ارتفاع المستطيل الثانى فيكون

س . م :: ع . عَ و

م . ص :: ق . قَ فاذا ضربنا حدود المتناسبة الاولى فى حدود المتناسبة الثانية بالترتيب يحدث

س × م . م × ص :: ع × ق : عَ × قَ وبقسمة حدى المتناسبة الاولى على م ينتج

س . ص :: ع × ق . عَ × قَ وهو المطلوب اثباته

(فى مساحة المستطيل)

مساحة المستطيل هى نسبته الى مستطيل آخر ماخوذ وحدة وحيث ثبت فى القضية المتقدمة ان نسبة اى مستطيلين الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه ينتج انه اذا جعل احد المستطيلين وحدة للقياس علمت مساحة المستطيل الآخر بقسمة حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه على حاصل ضرب قاعدة وحدة القياس فى ارتفاعه

(مثال ذلك)

اذا كان المستطيل س قاعدته ق = ٦م وارتفاعه ع = ٤م

فما يكون مساحته بالنسبة للمستطيل ص الذى قاعدته قَ = ٣م

وارتفاعه عَ = ٢م

فالجواب ان يقال ان نسبة مساحة الاول س الى الثانى ص كنسبة حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه اى ٦ × ٤ الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه اى ٣ × ٢ أو $\frac{س}{ص} = \frac{٦\times٤}{٣\times٢} = ٤$

اعنى ان المستطيل س يحتوى على المستطيل ص المجعول وحدة

اربع

واذا كانت ع = عَ يكون م : مَ :: ن : نَ

(تنبيه) اذا وقع ارتفاع المثلث خارجا عنه كما في الشكل تجرى فيه الطريقة المتقدمة بطرح مساحة المثلث ا د ب من مساحة المثلث ا د ح هكذا

ا د ح = $\frac{\text{د ح} \times \text{ا د}}{٢}$

و ا د ب = $\frac{\text{د ب} \times \text{ا د}}{٢}$ فيكون

ا د ح ــ ا د ب = $\frac{\text{د ح} \times \text{ا د}}{٢}$ ــ $\frac{\text{د ب} \times \text{ا د}}{٢}$

أو ا ب ح = $\frac{(\text{د ح} - \text{د ب})\text{ا د}}{٢}$ = $\frac{\text{ب ح} \times \text{ا د}}{٢}$

(الدعوى الخامسة الطريقة شكل ٩٧)

مساحة اى شكل متوازى الاضلاع تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

فالشكل ا ب ح د المتوازى الاضلاع مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته ا ب في ارتفاعه د هـ اى ا ب ح د = ا ب × د هـ

(برهانها) اذا وصل القطر د ب ينقسم المتوازى الاضلاع الى مثلثين متساويين كما تقدم اثباته في المقالة الاولى فمساحة المثلث ا ب د = $\frac{\text{ا ب} \times \text{د هـ}}{٢}$ ومساحة المثلث د ب ح = $\frac{\text{د ح} \times \text{ب و}}{٢}$ و د ح = ا ب و ب و = د هـ فتكون مساحة المثلث د ب ح = $\frac{\text{ا ب} \times \text{د هـ}}{٢}$

ومساحة متوازى الاضلاع ا ب ح د تساوى مساحة المثلث ا ب د زائدة مساحة المثلث ح ب د فتكون مساحة متوازى الاضلاع

ا ب ح د = $\frac{\text{ا ب} \times \text{د هـ}}{٢}$ + $\frac{\text{ا ب} \times \text{د هـ}}{٢}$ = $\frac{\text{ا ب} \times \text{د هـ} + \text{ا ب} \times \text{د هـ}}{٢}$

أو ا ب ح د = $\frac{(\text{ا ب} + \text{ا ب})\text{د هـ}}{٢}$ = $\frac{٢\text{ا ب} \times \text{د هـ}}{٢}$

أو ا ب ح د = $\frac{٢ \times \text{ا ب} \times \text{د هـ}}{٢}$ = ا ب × د هـ وبهذا يثبت المطلوب

(وينتج من هذه الطريقة نتائج)

(الدعوى الرابعة السطرية شكل ١٠٢ ثاني)

مساحة اي مثلث تساوي نصف حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

مساحة المثلث ا ب ح مثلا تساوي نصف حاصل ضرب قاعدته ب ح في ارتفاعه ا د اي تساوي $\frac{\text{ب ح} \times \text{ا د}}{٢}$ لان مساحة المثلث ا ب د القائم الزاوية في د تساوي $\frac{\text{ب د} \times \text{ا د}}{٢}$ ومساحة المثلث ا د ح القائم الزاوية في د تساوي $\frac{\text{د ح} \times \text{ا د}}{٢}$ ومساحة المثلث الكلي ا ب ح تساوي مجموع مساحتي المثلثين ا د ب و ا د ح فتكون مساحة المثلث ا ب ح

$$= \frac{\text{ب د} \times \text{ا د}}{٢} + \frac{\text{د ح} \times \text{ا د}}{٢} \text{ أو } = \frac{\text{ب د} \times \text{ا د} + \text{د ح} \times \text{ا د}}{٢} = \frac{(\text{ب د} + \text{د ح})\,\text{ا د}}{٢} \text{ أو } = \frac{\text{ب ح} \times \text{ا د}}{٢}$$

وهو المطلوب اثباته

(ويتج من هذه المطرية نتائج)

الاولى ان نسبة المثلثات المتحدة القاعدة الى بعضها كنسبة ارتفاعاتها الى بعضها

الثانية ان نسبة المثلثات المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة قواعدها الى بعضها

الثالثة ان نسبة اي مثلثين الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول في ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثاني في ارتفاعه

الرابعة ان المثلثات ذات القاعدة المشتركة التي رؤسها على مستقيم موازي للقاعدة المذكورة متكافئة ولايضاح ذلك يرمز بالحرف م لمثلث قاعدته ن وارتفاعه ع وبالحرف مَ لمثلث آخر قاعدته نَ وارتفاعه عَ فيكون $\text{م} = \frac{\text{ن} \times \text{ع}}{٢}$ و $\text{مَ} = \frac{\text{نَ} \times \text{عَ}}{٢}$ وقسمة احدهما على الآخر يحدث

$$\frac{\text{م}}{\text{مَ}} = \frac{\text{ن} \times \text{ع}}{٢} : \frac{\text{نَ} \times \text{عَ}}{٢} \text{ أو } = \text{ن} \times \text{ع} : \text{نَ} \times \text{عَ}$$

فاذا كان $\text{ن} = \text{نَ}$ يكون $\text{م} : \text{مَ} :: \text{ع} : \text{عَ}$

واذا

تساوى حاصل ضرب ارتفاعه فى نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين اوتساوى
حاصل ضرب نصف ارتفاعه فى مجموع قاعدتيه المتوازيتين

(تنبيه ٢)

يمكن اخذ مساحة شبه المنحرف بضرب ارتفاعه فى قاعدته المتوسطة بين
قاعدتيه المتوازيتين لان هذه القاعدة المتوسطة تساوى نصف مجموع
قاعدتيه المتوازيتين كما صرح به فى المقالة الاولى

(الدعوى السابعة السطرية شكل ١٠٦)

اذا قسم مستقيم مثل اح الى قسمين مختلفين مثل اب و بح فالمربع
المنشأ على المستقيم الكامل اح يحتوى على المربع المنشأ على الجزء اب
وعلى المربع المنشأ على الجزء الآخر بح وعلى ضعف المستطيل المكون
من الجزءين اب و بح اعنى ان $\overline{اح}^٢$ أو $(اب + بح)^٢ =$
$\overline{اب}^٢ + \overline{بح}^٢ + ٢ \, اب \times بح$

(برهانها) ان يرسم المربع ادحه ويؤخذ او = اب ويمد وع
موازيا للمستقيم اد ثم بط موازيا للمستقيم اه فينقسم المربع
ادحه الى اربعة اجزاء (الاول) ابءو وهو المربع المنشأ على اب
لاننا اخذنا او = اب (والثانى) بحدط وهو المربع المنشأ
على بح لان اح = اه و اب = او فيكون اح – اب
= اه – او اى ان بح = هو وبسبب التوازى يكون
بع = بح و دع = هو فيكون طبحد مساويا للمربع
المنشأ على بح فاذا طرحنا هذين المربعين من المربع الكلى يبقى المستطيلان
بحعج و هوبط ومساحة كل واحد منهما تساوى اب ×
بح وبهذا ثبت المطلوب

(تنبيه)

الاولى ان نسبة الاشكال المتوازية الاضلاع المتحدة القاعدة الى بعضها كنسبة ارتفاعاتها الى بعضها

الثانية ان نسبة الاشكال المتوازية الاضلاع المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة قواعدها الى بعضها

الثالثة ان نسبه اى شكلين متوازيي الاضلاع الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعده الثانى فى ارتفاعه

الرابعة انه اذا اتحدت القاعدة والارتفاع فى مستطيل ومتوازى الاضلاع كان المستطيل مكافئا لمتوازى الاضلاع

(الدعوى السادسة النظرية شكل ٩٥)

مساحة شبه المنحرف تساوى نصف حاصل ضرب ارتفاعه فى مجموع قاعدتيه المتوازيتين

فشكل ابجد الشبيه بالمنحرف مساحته تساوى نصف حاصل ضرب ارتفاعه جه فى مجموع قاعدتيه المتوازيتين اب و جد اى تكون مساحته $= \frac{\text{جه}(\text{اب}+\text{جد})}{٢}$

(برهانها) ان يوصل القطر اج فينقسم الشكل الى مثلثين ابج و اجد ومساحة المثلث ابج $= \frac{\text{جه}\times\text{اب}}{٢}$ ومساحة المثلث اجد $= \frac{\text{او}\times\text{جد}}{٢}$ ومساحة شبه المنحرف ابجد تساوى مساحة المثلث ابج زائدة مساحة المثلث اجد فتكون مساحة ابجد $= \frac{\text{جه}\times\text{اب}}{٢} + \frac{\text{او}\times\text{جد}}{٢}$ أو $= \frac{\text{جه}\times\text{اب}+\text{او}\times\text{جد}}{٢}$ وحيث ان او $=$ جه تكون مساحة ابجد $= \frac{\text{جه}(\text{اب}+\text{جد})}{٢}$ وهو المطلوب اثباته

(تنبيه ١)

حيث تبين ان مساحة شبه المنحرف ابجد $= \frac{\text{جه}(\text{اب}+\text{جد})}{٢}$

أو $= \text{جه}\times\frac{(\text{اب}+\text{جد})}{٢}$

أو $= \frac{\text{جه}}{٢}\times(\text{اب}+\text{جد})$ يعلم من ذلك ان مساحة شبيه المنحرف

تساوى

فالقاعدة اك من المستطيل هى حاصل جمع الخطين اب و بد وارتفاعه اهـ هو فاصل الخطين المذكورين فحينئذ المستطيل اكلهـ = (اب + بد) × (اب − بد) لكن هذا المستطيل مركب من جزئين اب ح هـ + ب ح ل ك والجزء ب ح ل ك يساوى المستطيل هـ ء ع ف لان ب ح = ءهـ و ب ك = هـ ف فيكون اك ل هـ = اب ح هـ + هـ ء ع ف وحيث ان هذين الجزئين مكونان للمربع اب ى ف ناقصا المربع ء ح ى ع الذى هو المربع المنشأ على بد يكون

$$(اب + بد) \times (اب - بد) = \overline{اب}^2 - \overline{بد}^2$$

(تنبيه)

هذه القضية تكتب بالقانون الجبرى هكذا

$$(د + ب) \times (د - ب) = د^2 - ب^2$$

*(الدعوى العاشرة النظرية * شكل ١٠٩)*

المربع المرسوم على وتر الزاوية القائمة من المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين فليكن ابد مثلثا قائم الزاوية فى ا فترسم مربعات على الاضلاع الثلاثة ثم ينزل من الزاوية القائمة على الوتر عمود اى يمد الى هـ ويوصل القطران ار و بى حيث ان الزاوية ادر مركبة من الزاوية ادب ومن الزاوية القائمة بدر وان الزاوية بدى مركبة من الزاوية ادب المذكورة ومن الزاوية القائمة ادى تكون الزاوية ادر = بدى ولكون اد = دى من المربع و در = بد كذلك يكون المثلث ادر مساويا للمثلث ى ب د لتساوى الزاوية المحصورة بين الاضلاع المتساوية بالتناظر واعلم ان المثلث ادر نصف المستطيل د ءهـر المتحد معه فى القاعدة در

هذه القضية تبين بالقانون الجبرى هكذا

$(د + ح)^2 = د^2 + ح^2 + ٢ د ح$

(الدعوى الثامنه المطريه شكل ١٠٧)

اى مستقيم مثل ا ح كان فاضل مستقيمين مثل اب و ب ح يكون المربع المنشا عليه مساويا للمربع المنشا على احدهما اب زائدا المربع المنشا على الاخر ب ح ناقصا ضعف مستطيل الخطين اب و ب ح اعنى ان

$\overline{اح}^2$ أو $(اب - بح)^2 = \overline{اب}^2 + \overline{بح}^2 - ٢ اب \times بح$

(برهانها) ان يرسم المربع اب ء ف ثم يؤخذ اهـ = اح ويمد ح ع موازيا للمستقيم ب ء و ح ك موازيا اب ويكمل المربع هـ ب ل ك فمساحة كل من المستطيلين ح ب ء ع و ع ل ك ء تساوى اب × ب ح فاذا طرحناهما من الشكل الكلى اب ل ك هـ ا الذى مقداره يساوى $\overline{اب}^2 + \overline{بح}^2$ يبقى المربع ا ح ء هـ وبهذا يثبت المطلوب

(تنبيه)

هذه القضية تبين بالقانون الجبرى هكذا

$(ح - ب)^2 = ح^2 + ب^2 - ٢ ح ب$

(الدعوى التاسعه المطريه شكل ١٠٨)

المستطيل المنشا على مجموع خطين مثل اب و ب ح وعلى فاضلهما يساوى فاضل مربعى هذين الخطين اعنى ان $(اب + بح) \times (اب - بح) = \overline{اب}^2 - \overline{بح}^2$.

(برهانها) ان يرسم مربعان اب ء ف و ا ح ء هـ على اب و ا ح ثم يمد اب بكمية ب ك = ب ح ويكمل المستطيل ا ك ل هـ

فالقاعدة

مربع الوتر الى مربع احد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة كنسبة الوتر للسهم المجاور لهذا الضلع والسهم هنا جزء من الوتر محدود بالعمود النازل من الزاوية القائمة فالجزء ب‌د هو السهم المجاور للضلع اب والجزء د‌ح هو السهم المجاور للضلع اح

ويوجد ايضا كما تقدم $\overline{ب‌ح}^{٢} : \overline{اح}^{٢} :: ب‌ح : ح‌د$ الرابعة حيث ان للمستطيلين ب‌د‌هو و د‌ح‌ره ارتفاعا واحدا تكون نسبة احدهما الى الآخر كالنسبة بين ب‌د و ح‌د ومن حيث ان المستطيلين مكافئان للمربعين $\overline{اب}^{٢}$ و $\overline{اح}^{٢}$ يكون

$$\overline{اب}^{٢} : \overline{اح}^{٢} :: ب‌د : د‌ح$$

يعني ان نسبة احد مربعي ضلعي الزاوية القائمة الى الآخر كنسبة سهمي الوتر المجاورين لهما

*(تعريف * شكل ١٠٩ الثاني)*

مسقط مستقيم مثل اب على اخر مثل ح‌د هو الجزء اَ‌بَ المحصور بين موقعي العمودين النازلين من النقطتين ا و ب على المستقيم ح‌د

*(الدعوى الحادية عشر الطرية * شكل ١١٠)*

مربع الضلع المقابل للزاوية الحادة من اى مثلث يساوى مجموع مربعي الضلعين الآخرين باقصا ضعف المستطيل المكون من احد هذين الضلعين ومن مسقط الآخر على الاول

فاذا كانت الزاوية ح حادة في المثلث اب‌ح وانزلنا عمودا اد على مجاورها ب‌ح يكون

$$\overline{اب}^{٢} = \overline{اح}^{٢} + \overline{ب‌ح}^{٢} - ٢ ب‌ح \times ح‌د .$$

(برهانها) ان يقال لا يخلو اما ان يقع العمود داخل المثلث او خارجه فاذا وقع العمود اد داخل المثلث اب‌ح كان ب‌د = ب‌ح − ح‌د

وفى الارتفاع جد وان المثلث بجح نصف المربع اب لان الزاوية باج قائمة كالزاوية جاك والمستقيمين اب و اك لا يكونان الا خطا مستقيما موازيا للمستقيم جب فحينئذ يكون الارتفاع اج مشتركا بين المثلث بجح والمربع اب المتحدين فى القاعدة جب فيكون المثلث نصف المربع وقد تبين ان المثلث اجر مساويا للمثلث بجح فيكون المستطيل جدهر الذى هو ضعف المثلث اجر مكافئا للمربع اب الذى هو ضعف المثلث بجح وبمثل هذا يبرهن على ان المستطيل بدهو مكافئ للمربع اح وحيث ان المستطيلين جدهر و بدهو مكافئان للمربع بجرو يكون المربع بجرو المنشأ على الوتر مساويا لمجموع المربعين ابحط و اجك المنشأين على الضلعين الآخرين اى ان $\overline{\text{بج}}^{2} = \overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اج}}^{2}$

(نتائج)

الاولى مربع احد ضلعى الزاوية القائمة يساوى مربع الوتر ناقصا مربع الضلع الآخر ويكتب هكذا $\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{بج}}^{2} - \overline{\text{اج}}^{2}$

الثانية اذا كان ابجد مربعا قطره اج يكون المثلث ابج قائم الزاوية ومتساوى الساقين فيحدث $\overline{\text{اج}}^{2} = \overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{بج}}^{2} = ٢\,\overline{\text{اب}}^{2}$ اعنى ان المربع المنشأ على القطر اج ضعف المربع المنشأ على الضلع اب وحيث ان $\overline{\text{اج}}^{2} : \overline{\text{اب}}^{2} :: ٢ : ١$ فيكون $\text{اج} : \text{اب} :: \sqrt{٢} : ١$ اعنى انه لا نسبة قياسية بين قطر المربع وضلعه انظر (شكل ١١٨)

الثالثة حيث تبين ان المربع اب مكافئ للمستطيل جدهر والارتفاع جر مشترك بين المربع جبور والمستطيل جدهر تكون نسبة المربع جبور للمستطيل جدهر كنسبة القاعدة بج للقاعدة جد اعنى يكون $\overline{\text{بج}}^{2} : \overline{\text{اج}}^{2} :: \text{بج} : \text{جد}$ اعنى ان نسبة

مربع

$\overline{اب}^2$ واختصرنا كما في الدعوى السابقة حدث

$$\overline{اب}^2 = \overline{اج}^2 + \overline{بج}^2 + ٢\, بج \times جد$$

(الدعوى الثالثة عشر البطرية شكل ١١٢)

اذا وصل مستقيم مثل اه من رأس اى مثلث مثل ا ب ج الى وسط قاعدته حدث

$$\overline{اب}^2 + \overline{اج}^2 = ٢\,\overline{اه}^2 + ٢\,\overline{به}^2$$

(برهانها) ان نزل العمود اد على القاعدة بج في المثلث اهج يحدث

$$\overline{اج}^2 = \overline{اه}^2 + \overline{هج}^2 - ٢\, هج \times هد$$

ومن المثلث ابه يحدث

$$\overline{اب}^2 = \overline{اه}^2 + \overline{هب}^2 + ٢\, هب \times هد$$

فاذا جمعنا ولاحظنا ان هب = هج يحدث

$$\overline{اب}^2 + \overline{اج}^2 = ٢\,\overline{اه}^2 + ٢\,\overline{هب}^2$$

(الدعوى الرابعة عشر البطرية شكل ١١٢ الثاني)

كل شكل رباعي مجموع مربعات اضلاعه الاربعة يساوي مجموع مربعي قطريه زائدا اربعة امثال مربع الخط الموصول بين وسطيهما

(برهانها) ان يفرض اج و بد قطري المربع ا ب ج د و ع و وسطيهما ثم يوصل بو و دو و عو وبمقتضى الدعوى المتقدمة يحدث

من المثلث ابج $\overline{اب}^2 + \overline{بج}^2 = ٢\,\overline{بو}^2 + ٢\,\overline{او}^2$

ومن المثلث ادج $\overline{اد}^2 + \overline{دج}^2 = ٢\,\overline{دو}^2 + ٢\,\overline{او}^2$

وبالجمع يكون $\overline{اب}^2 + \overline{بج}^2 + \overline{اد}^2 + \overline{دج}^2 = ٢\,\overline{بو}^2 + ٢\,\overline{او}^2 + ٢\,\overline{دو}^2 + ٢\,\overline{او}^2$ او

ومنه ينتج $\overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{جد}}^2 - 2\,\text{بج} \times \text{جد}$

فاذا اضفنا $\overline{\text{اد}}^2$ يكون $\overline{\text{بد}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{جد}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 - 2\,\text{بج} \times \text{جد}$

وحيث ان المثلثين القائمي الزاوية ا ب د و ا ج د ينتجان $\overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{اب}}^2$ و $\overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{جد}}^2 = \overline{\text{اج}}^2$ يكون

$\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 - 2\,\text{بج} \times \text{جد}$

واذا وقع العمود اد خارج المثلث ا ب ج كان $\text{بد} = \text{جد} - \text{بج}$ وعليه يكون

$\overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{جد}}^2 + \overline{\text{بج}}^2 - 2\,\text{جد} \times \text{بج}$ فاذا اضفنا $\overline{\text{اد}}^2$

واختصرنا ينتج $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 - 2\,\text{بج} \times \text{جد}$.

*(الدعوى الثانية عشر النظرية * شكل ١١١)*

مربع وتر الزاوية المنفرجة من اى مثلث منفرج الزاوية يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين زائدا ضعف المستطيل المكوّن من احدهما ومن مسقط الآخر على الاول

فاذا كانت الزاوية ج من المثلث ا ب ج منفرجة وانزلنا اد عمودا على مجاورها بج يكون $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{اج}}^2 + \overline{\text{بج}}^2 + 2\,\text{بج} \times \text{جد}$.

(برهانها) ان يقال ان العمود لا يمكن ان يقع داخل المثلث لانه لو وقع في هـ مثلا لكان في المثلث ا ج هـ زاوية قائمة هـ وزاوية منفرجة ج لكن هذا غير ممكن فلا يقع العمود الا خارج المثلث وحينئذ يكون $\text{بد} = \text{بج} + \text{جد}$

ومنه ينتج $\overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{جد}}^2 + 2\,\text{بج} \times \text{جد}$ فاذا اضفنا

$\overline{\text{اد}}^2$

اى ك ال ا ا ـ ه يكافى ده ح فيكون
اى . ب د :: اه ه ح

(تنائج)
الاولى ينتج من المناسبة المتقدمة ان
اى + ب د اى . اه + ه ح اه اى
ا ب : اى . اح اه وان
ا ب : ب د .. اح ح ه
الثانية المستقيمان مثل ا ب و ح د المقطوعان بمتوازيات اح و هو
و رح و ب د الخ ينقسمان الى اجزاء متناسبة بحيث يكون
هو وح رب ح د
لانا اذا اسددنا المستقيم ا ب و ح د وكانت ط نقطة ملاقيهما يحدث
من المثلث ط ه و الذي فيه الخط اح موازى للقاعدة هو ان
ط ه . اه : ط و . ح و او
ط ه ط و اه : حو
ومن المثلث رح ط اب
ط ه . هو ط و . وح او
ط ه : ط و .: هو . وح فينتج
اه : حو .: هو : وح
وبمثل هذا يتضح ان
هو : وح .. رب . ح د وهكذا
اى ان الخطين ا ب و ح د منقسمان بالخطوط المستقيمة المتوازية اح
و هو و رح الخ الى اجزاء متناسبة

(الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ١١٦)
اذا قطع خط مثل ده ضلعين مثل ا ب و اح من مثلث مثل
ا ب ح بحيث يكون اى : د ب :: اه : ه ح يكون الخط

= ٢ (بو٢ + دو٢) + ٤ او٢

ومن المثلث بود بو٢ + دو٢ = ٢ بع٢ + ٢ وع٢ فيكون

اب٢ + بج٢ + اد٢ + دج٢ = ٤ بع٢ + ٤ وع٢ + ٤ او٢

وحيث ان اج٢ = ٤ او٢ و بد٢ = ٤ بع٢ يكون

اب٢ + بج٢ + اد٢ + دج٢ = بد٢ + اج٢ + ٤ وع٢

نتيجة اذا كان الشكل الرباعي متوازي الاضلاع انعدم المستقيم ع و وكان مجموع مربعات الاضلاع الاربعة من اى شكل متوازي الاضلاع مساويا مجموع مربعي قطريه

(في الخطوط المتناسبة والاشكال المتشابهة)

(الدعوى الخامسة عشر النظرية *شكل ١١٤)*

المستقيم الموازي لاحد اضلاع مثلث يقسم ضلعيه الآخرين الى اجزاء متناسبة فالمستقيم مثل د هـ الموازي للقاعدة ب ج من المثلث ا ب ج يقسم الضلعين ا ب و ا ج الى اجزاء متناسبة بحيث يكون

اد : دب :: اهـ : هـ ج

(برهانها) ان نوصل ب هـ و د ج فيحدث مثلثان ب هـ د و د هـ ج متكافئان لاتحاد القاعدة د هـ وتساوي الارتفاعين لان الرأسين ب و ج موضوعتان على مستقيم موازٍ للقاعدة والنسبة بين المثلثين ا د هـ و ب د هـ المشتركين في الرأس هـ والمتحدين في الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما اد و د ب اعنى

ا د هـ : ب د هـ :: اد : د ب

والنسبة بين المثلثين ا د هـ و د هـ ج المشتركين في الرأس د والمتحدين في الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما اهـ و هـ ج اعنى

ا د هـ : د هـ ج :: اهـ : هـ ج

اهكن

ان يكون داخلا رسم مثلث مشابه له لانه اذا غيرت اضلاع المثلث المعلوم دعوا سببا تحدث ثلاثة اضلاع اخر يمكن بها تكوين مثلث لان كلا منها اقل من مجموع الضلعين الآخرين

(الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ١١٩)

اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسب اضلاعهما المتناظرة (والاضلاع المتناظرة هى المقابلة للزوايا المتساويه)

فاذا كان فى مثلثين مثل ا ب ح و د هـ ح زاوية ا = د وزاويه ب = د ح هـ وزاوية ا ح ب = هـ يكون

ب ح : ح هـ :: ا ب . ح د · ا ح : د هـ

(برهانها) ان يقال لو وضع الضلعان ب ح و ح هـ على استقامة واحدة ومد الضلعان ب ا و هـ د حتى التقيا فى نقطه مثل و لكان الشكل الحادث ا ح د و متوازى الاضلاع لانه يلزم من كون الخط ب ح هـ مستقيما واحدا والزاوية ب ح ا = ح هـ د ان يكون الخط ا ح موازيا للخط د هـ او و هـ كما تقرر ذلك فى المقاله الاولى وكذا يلزم من كون الزاوية ا ب ح = د ح هـ ان يكون الخط ا ب او ب و موازيا للخط د ح

ويلزم من كون الخط ا ح موازيا للقاعدة و هـ فى المثلث ب هـ و ان يكون ب ح : ح هـ :: ب ا : ا و كما تقرر ذلك فى النظرية الخامسة عشر فاذا وضع فى هذه التناسب الخط ح د بدل مساويه ا و تكون نسبة ب ح : ح هـ :: ب ا . ح د

ويلزم من كون الخط ح د موازيا للضلع ب و ان يكون ب ح . ح هـ :: و د : د هـ فاذا وضع ا ح بدل مساويه و د يكون ب ح : ح هـ :: ا ح : د هـ ويلزم من اتحاد نسبة ب ح : ح هـ فى هذه المتناسبة والمتناسبة المتقدمة ان يكون ا ح : د هـ :: ب ا : ح د اى ان الاضلاع المتناظرة متناسبة فقد ثبت بهذا ان المثلثين اللذين زواياهما

ده موازيا للقاعدة ب ح وهذه عكس الدعوى السابقة
(برهانها) ان يقال لو لم يكن ده موازيا للقاعدة ب ح بان كان د و
هو الموازي لها لحدث اد . ب د . او . و ح وقد فرضنا ان
اد . ب د :: اه . ه ح فينتج من مقارنة هذه المتناسبة
بالسابقة ان او . و ح :: اه . ه ح وهي محالة

(الدعوى السابعة عشر النظرية شكل ١١٧ و ١١٧ الثاني)
الخط اد المنصف لراوية ا من مثلث مثل اب ح يقسم القاعدة
ب ح الى سهمين ب د و د ح مناسبين للضلعين اب و اح
والخط اى المنصف للزاوية الخارجة ح اه يحدد على القاعدة
الممتدة جزئين ب ى و ح ى مناسبين للضلعين المذكورين
اب و اح .

(برهان القضية الاولى) ان يرسم من النقطة ح خط مثل ح ه يوازي
اد ويمد حتى يقطع الامتداد ب ا فيكون في المثلث ب ح ه خط اد
موازي القاعدة ه ح ويحدث ب د . د ح :: اب : اه لكن
المثلث اح ه متساوي الساقين لانه يلزم من توازي اد و ح ه ان
تكون الزاوية اح ه = د اح والزاوية اه ح = ب اد
وحيث ان د اح = ب اد بالفرض تكون الزاوية اح ه = اه ح
ويكون اه = اح فاذا وضعنا اح عوضا عن اه في المتناسبة
المتقدمة يكون ب د : د ح . اب : اح وهو المطلوب
(وبرهان القضية الثانية) ان يرسم ح ح يوازي اى فيحدث من المثلث
ب اى هذه المتناسبة ب ى : ى ح :: اب : اح وبمثل ما تقدم
يبرهن على ان المثلث اح ح متساوي الساقين اي ان اح = اح
فيكون ب ى : ى ح :: اب . اح وهو المطلوب .

(تعريف)
المثلثان المتشابهان مثلثان اضلاعهما المتناظرة متناسبة فاذا علم مثلث

امك

المساطرة متساوية

(تنبيهات)

الاول الزوايا المتساوية من مثلثين اوتارها متناسبة

الثاني يشاهد من هذه القضية وسابقتها ان تساوي الزوايا ملازم لتناسب الاضلاع وتناسب الاضلاع ملازم لتساوي الزوايا واحد هذين الشرطين كاف في تشابه المثلثين وليس كذلك في الاشكال المغايرة للمثلث لانه لو نظر الى الشكل الرباعي كالمرسوم في الشكل ١٢١ ورسم الخط هـ و موازيا للضلع ب ح لكانت كل زاوية من الشكل الرباعي اهـ و د مساوية لنظيرتها من الشكل الرباعي اب ح د وليست الاضلاع المتناظرة متناسبة كما هو واضح من الشكل وكذا يمكن تقارب النقطتين ب و د أو تباعدهما دون تغير تناسب اضلاع الشكل الرباعي المذكور وهي اب و ب ح و ح د و د ا وبهذا تتغير مقادير الزوايا فتبين بهذا انه يمكن في الشكل الرباعي احتلال تناسب الاضلاع بدون تغير مقادير الزوايا وتغيير الزوايا بدون تبديل الاضلاع اعني انه لا يلزم من تناسب الاضلاع تساوي الزوايا ولا من تساوي الزوايا تناسب الاضلاع الا في المثلث فقط

الثالث اهم القضايا في علم الهندسة قضية شكل العروس مع هاتين القضيتين لان جميع الاشكال المسطحة المستوية يمكن تقسيمها الى مثلثات وكل مثلث يمكن تقسيمه الى مثلثين قائمي الزاوية

(الدعوى العشرون النظرية شكل ١٢٢)

اذا ساوت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر وكانت الاضلاع المحيطة بها بين الزاويتين متناسبة كان المثلثان متشابهين

اي اذا كانت الزاوية ا من المثلث اب ح مساوية للزاوية د من المثلث د هـ و وكانت اب . د هـ :: ا ح : د و يكون المثلث اب ح مشابها للمثلث د هـ و

(برهانها) ان يقال لو اخذ البعد ا ر = د هـ ورسم من النقطة

المتناظرة متساوية متشابهات وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية انه يكفي لتشابه المثلثين تساوى زاويتين لان الزاوية الثالثة تكون حينئذ مساوية لنظيرتها

(الدعوى التاسعة عشر النظرية شكل ١٢٠)

المثلثان اللذان اضلاعهما المتناظرة متناسبة زواياهما المتناظرة متساوية

فالمثلثان مثل ا ب ح و ذ هـ و اذا كان فيهما ب ح هـ و

ا ب : ذ هـ :. ا ح ٠ ذ و تكون الزاوية ا = ذ

والزاوية ب = هـ والزاوية ح = و

(برهانها) ان يقال لو انشئت زاوية مثل و هـ ر مساوية للزاوية ب وزاوية مثل هـ و ر مساوية للزاوية ح لكانت الزاوية ر من المثلث هـ و ر مساوية للزاوية ا وحينئذ تكون كل زاوية من المثلث ا ب ح مساوية لنظيرتها من المثلث هـ و ر ويلزم من هذا ان يكون

ب ح . هـ و :٠ ا ب : هـ ر والمفروض ان

ب ح : هـ و ٠ ا ب . هـ ذ ويلزم من تساوى الحدود الثلاثة فى هاتين المتناسبتين ان يكون الحد الرابع هـ ر = هـ ذ وكذا يلزم من تساوى الزوايا المذكورة ان تكون

ب ح هـ و :: ا ح و ر والمفروض ان

ب ح : هـ و .: ا ح ٠ و ذ ويلزم ايضا من تساوى الحدود الثلاثة فى هاتين المتناسبتين ان يكون الحد الرابع و ر = و ذ وحيث تساوت الاضلاع المتناظرة من المثلثين ذ هـ و و ر هـ و تكون زواياهما المتناظرة كذلك ويلزم من كون زوايا المثلث هـ ر و انشئت مساوية لنظائرها من المثلث ا ب ح ان تكون زوايا المثلث ذ هـ و مساوية لزوايا المثلث ا ب ح كل لنظيرتها

فقد ثبت بهذا ان المثلثين اللذين اضلاعهما المتناظرة متناسبة زواياهما

المتناظرة

دل : ـو :: ال : او

ولما يلزم من كون الخط لك موازيا للخط رو ان تكون

ال : او :: لك : ور

ويلزم من اتحاد نسبة ال : او فى هاتين المتناسبتين ان يكون

دل : ـو : لك : ور

وبمثل هذا يبرهن على ان

لك : ور :: طك : رع وهكذا

فقد ثبت بهذا انه كما تنقسم القاعدة ـح فى النقط و و ر و ع

ينقسم الخط ءه فى النقط ل و ك و ط

فينتج من هذا انه اذا انقسمت القاعدة ـح الى اقسام متساوية فى النقط

و و ر و ع ينقسم الخط ءه فى النقط ل و ك و ط الى

اقسام متساوية كذلك

* (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية شكل ١٢٦)،

اذا انزل عمود من رأس الزاوية القائمة فى المثلث القائم الزاوية على وترها

فاعلم

اولا ان هذا العمود يقسم المثلث الى مثلثين كلاهما يشابه المثلث

الكلى

وثانيا ان كلا من الضلعين المحيطين بالقائمة يصير وسطا متناسبا بين وتر القائمة

والقسم المجاور له

وثالثا ان العمود المنزل من القائمة على الوتر يكون وسطا متناسبا بين قسمى

الوتر المذكور

اى اذا انزل عمود مثل اء من رأس الزاوية القائمة ا فى المثلث القائم

الزاوية اـح على وترها ـح فاعلم

اولا ان هذا العمود يقسم المثلث اـح الى مثلثين اـء و اءح

كلاهما يشابه المثلث الكلى اـح

د مستقيم مثل دح موازياً للضلع ب ح لكانت كل زاوية من المثلث
ادح مساوية لنظيرتها من المثلث ا ب ح كما تقرر ذلك في المقالة الاولى
ويلزم من هذا ان يكون

ا ب : اد :: اح : اح والمفروض أن

ا ب : ده :: اح : دو ويلزم من كون

اد = ده ان يكون الحد الرابع دو = اح ويلزم من هذا ان يكون
المثلث ادح مساويا للمثلث ده و كما تقرر ذلك في الطريقة السادسة
من المقالة الاولى ويلزم من كون المثلث ادح مشابها للمثلث ا ب ح
ان يكون مساويه وهو المثلث ده و مشابها للمثلث ا ب ح وهو المطلوب

* (الدعوى الحادية والعشرون الطريه) *

المثلثان اللذان اضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة متشابهان لان
المثلثين اللذين بهذه المثابة زواياهما المتناظرة متساوية وقد تقرر في الطريقة
الثامنة عشر انه اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت اضلاعهما
المتناظرة فقد ثبت بهذا ان المثلثين اللذين اضلاعهما المتناظرة متوازية
او متعامدة متشابهان وهو المطلوب

(الدعوى الثانية والعشرون الطريقة شكل ١٢٥)

اذا وصل من رأس مثلث الى قاعدته خطوط مستقيمة قدر ما يراد فهذه
الخطوط تقسم قاعدة المثلث وما وازاها الى اجزاء متناسبة اى اذا وصل من
رأس مثلث مثل ا ب ح الى قاعدته ب ح خطوط مستقيمة مثل او
ار الخ فهذه الخطوط تقسم القاعدة ب ح وما وازاها مثل ده
الى اجزاء متناسبة اعنى يكون

دل : ب و :: لك : ور :: كط : رح الخ

(برهانها) ان يقال يلزم من كون الخط دل موازيا للخط ب و ان تكون
كل زاوية من المثلث ادل مساوية لنظيرتها من المثلث ا ب و ويلزم من
هذا ان يكون

$\overline{\text{با}}^2 = \text{بد} \times \text{بج}$

(٢) ان

$\overline{\text{جا}}^2 = \text{دج} \times \text{بج}$

الاشياء المتساوية ينتج ان

$\overline{\text{جا}}^2 = \text{بد} \times \text{بج} + \text{دج} \times \text{بج}$ أو

$= (\text{بد} + \text{دج}) \times \text{بج} = \text{بج} \times \text{بج} = \overline{\text{بج}}^2$

مربع وتر القائمة يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين
على صحة هذه الدعوى مما تقدم بوجه آخر فهذا دليل على ان
هندسية قطعية اذ النظريات مؤسسة على البديهيات التي

(نتيجة شكل ١٢٧)

رية انه لو وصل وتران مثل اب و اج من اى نقطة
ـل ا الى نهايتي قطر مثل ب ج لكان المثلث الحادث
وية في ا وحينئذ يكون العمود اد المنزل من اى
على القطر وسطا متناسبا بين قسمي القطر المذكورهما
وكذا يكون الوتر اب وسطا متناسبا بين القطر ب ج
له وهو ب د اعني يكون

$\overline{\text{اب}}^2 = \text{بد} \times \text{بج}$

ـ اج وسطا متناسبا بين القطر ب ج والقسم المجاور له
ي يكون

$\overline{\text{اج}}^2 = \text{دج} \times \text{بج}$

ثم يكون

وثانيا ان كلا من الضلعين ا ب و ا ح المحيطين بالقائمة يصير وسطا متناسبا بين وتر القائمة ب ح والقسم المجاور له ب ى أو ى ح .
وثالثا ان العمود ا د المنزل من القائمة على الوتر يكون وسطا متناسبا بين قسمي الوتر المذكور وهما ب ى و ى ح
(برهان القضية الاولى) ان يقال يلزم من كون الزاوية ب مشتركة في المثلثين ب ا د و ب ا ح والزاوية ب د ا = ب ا ح لقيامهما ان تكون الزاوية ب ا د = ح وان يكون المثلث ب ا د مشابها للمثلث ب ا ح
ويعمل هذا البرهان على ان المثلث ح ا ى يشابه المثلث ب ا ح فاذن تكون المثلثات ب ا ى و ح ا ى و ب ا ح متشابهة وهو المطلوب
(وبرهان القضية الثانية) ان يقال يلزم من كون المثلث ب ا ى مشابها للمثلث ب ا ح ان يكون

ب ى . ب ا :: ب ا : ب ح .... (١)

وكذا يلزم من كون المثلث ح ا ى مشابها للمثلث ب ا ح ان يكون

ى ح : ا ح . ا ح . ب ح .... (٢)

فقد ثبت بهذا ان كلا من الضلعين ا ب و ا ح المحيطين بالقائمة وسط متناسب بين وتر القائمة والقسم المجاور له وهو المطلوب
(وبرهان القضية الثالثة) ان يقال يلزم من كون المثلث ا ب ى مشابها للمثلث ا ى ح ان تكون

ب ى . ا ى .. ا ى : ى ح .... (٣)

يعني ان العمود ا ى وسط متناسب بين قسمي الوتر وهما ب ى و ى ح وهو المطلوب

(تابيه)

حيث ان مسطح الطرفين في كل متناسبة هندسية يساوي مسطح الوسطين ينتج من المتناسبة (١) ان

ا ب^٢

ا ب هـ ، ا ب ح ، ا د هـ × ا ب هـ :: ا ب × ا ح ، ا د × ا هـ

بقسمة حدي النسبة الاولى على المضروب المشترك ا ب هـ يصير

ب ح : ا د هـ :: ا ب × ا ح : ا د × ا هـ وهو المطلوب

(نتيجه)

ينتج من هذه النظرية ان المثلثين المذكورين يكونان متكافئين اذا كان

المستطيل ا ب × ا ح مساويا للمستطيل ا د × ا هـ أو اذا كان

ا ب : ا د :: ا هـ : ا ح وهذا انما يتأتى اذا كان الخط ح د

موازيا للخط ب هـ

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية شكل ١٢٢)

نسبة المثلثين المتشابهين الى بعضهما كنسبة مربع ضلع من احدهما

لمربع نظيره

أي ان المثلث ا ب ح : المثلث د هـ و :: $\overline{\text{ا ب}}^2$: $\overline{\text{د هـ}}^2$

(برهانها) ان يقال يلزم من كون المثلث ا ب ح مشابها للمثلث د هـ و

ان تكون الزاوية ا = د والزاوية ب = هـ والزاوية ح = و

ويلزم من كون الزاوية ا = د ان يكون

ا ب ح : د هـ و :: ا ب × ا ح : د هـ × د و

كما تقرر ذلك في النظرية المتقدمة وهذه المناسبة يمكن وضعها بهذه الصورة

$$\frac{\text{اب ح}}{\text{د هـ و}} = \frac{\text{اب}}{\text{د هـ}} \times \frac{\text{اح}}{\text{د و}}$$

ويلزم من كون المثلث ا ب ح مشابها للمثلث د هـ و ان يكون

$$\frac{\text{اح}}{\text{د و}} = \frac{\text{اب}}{\text{د هـ}}$$

فاذن يكون

$$\frac{\text{اب ح}}{\text{د هـ و}} = \frac{\text{اب}}{\text{د هـ}} \times \frac{\text{اب}}{\text{د هـ}} = \frac{\overline{\text{اب}}^2}{\overline{\text{د هـ}}^2}$$ وهو المطلوب

(تعريف شكل ١٢٩ الثاني)

كثيرا الاضلاع المتشابهان شكلان مركبان من مثلثات متشابهة بالتناظر

اب^2 : اج^2 :: بد × بج : دج × بج

فاذا قسم حدا النسبة الثانية على المضروب المشترك الذى هو بج آلت هذه المتناسبة الى هذه

اب^2 : اج^2 :: بد : دج

ولو قورن المربعان اب^2 و بج^2 لحدث

اب^2 : بج^2 :: بد : بج

وكذا لو قورن المربعان اج^2 و بج^2 لحدث

اج^2 : بج^2 :: دج : بج

وقد ذكرنا ذلك فى النتيجة الثالثة والرابعة من شكل العروس فلا حاجة للاطالة فتأمل

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية شكل ١٢٨)

المثلثان اللذان فى احدهما زاوية مساوية لنظيرتها من الآخر النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين بالزاوية الاولى ومستطيل الضلعين المحيطين بنظيرتها اى ان

المثلث ابج : المثلث ادهـ :: اب × اج : اد × اهـ

(برهانها) ان يقال لو وصل الخط بهـ لحدث مثلث ابهـ ارتفاعه عين ارتفاع المثلث ادهـ لاشتراكهما فى الرأس هـ واتحاد اتجاه القاعدتين اب و اد ويلزم من هذا ان يكون

ابهـ : ادهـ :: اب : اد

وكذا يلزم من اتحاد الارتفاع فى المثلثين ابج و ابهـ ان يكون

ابج : ابهـ :: اج : اهـ

فلو ضربت حدود هاتين المتناسبتين بالترتيب لحدث

ابهـ

(الدعوى السابعة والعشرون النظريه شكل ١٢٩)

كثيرا الاضلاع اللذان زواياهما المتناظرة متساوية واضلاعهما المتناظرة متناسبة متشابهان اعنى انهما يتركبان من مثلثات متناظرة متشابهه ومتماثله الوضع

(برهانها) ان يقال لو وصل من رأسين متناظرتين مثل ا و و اقطار مثل اح و اى و وح و وط لكان المثلث اب‌ح مشابها للمثلث ورح لان الزاوية اب‌ح = ورح بالفرض وايضا

اب : ور :: بح : رح وقد تقرر فى النظرية الحادية والعشرين ان المثلثين اللذين بهذه المثابة متشابهان ويلزم من تشابههما ان تكون الزاوية بحا مساوية للزاوية رحو فاذا طرحت الزاوية بحا من الزاوية بحى والزاوية رحو من الزاوية رحط المساويه للزاوية بحى كانت الزاوية احى مساوية للزاوية وحط ولكن حيث ان المثلثين اب‌ح و ورح متشابهان تكون

اح : وح :: بح : رح

وقد فرض ان

بح : رح :: حى : حط

فاذن يكون

اح : وح :: حى : حط

وقد اتضح ان الزاوية احى = وحط فاذن يكون المثلث احى مشابها للمثلث وحط وبمثل هذا برهن على ان المثلث اهى مشابه للمثلث وىط وكذا البواقى كائنا ما كان عدد الاضلاع فى كثيرى الاضلاع المفروضين

(الدعوى الثامنة والعشرون النظرية شكل ١٢٩)

النسبة بين محيطى كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسبه بين ضلعين متناظرين

ومتماثلة الوضع ومتحدة العدد فاذا علم كثير الاضلاع مثل ا ب ج د ه امكن دائماً رسم شكل آخر يكون مشابهاً له لانه لو وصل القطران ا ج و ا د من النقطة ا ومدّ من نقطة ما مثل بَ من نقط الضلع ا ب أو من نقط استقامته بَ جَ موازياً للضلع ب ج ثم جَ دَ موازياً للضلع ج د ثم دَ هَ موازياً للضلع د ه وهكذا لظهر ان الشكلين ا ب ج د ه و ا بَ جَ دَ هَ مركبان من مثلثات متحدة العدد ومتشابهة ومتماثلة الوضع

(الدعوى السادسة والعشرون المطرية شكل ١٢٩)

كثيرا الاضلاع المتشابهان زواياهما المتناظرة متساوية واضلاعهما المتناظرة متناسبة

(برهان القضية الاولى) ان يقال يلزم من تشابه المثلثات المتناظرة ان تكون الزاوية ز ح و = ب ج ا والزاوية و ح ط = ا ج د فاذن تكون الزاوية ز ح ط = ب ج د وهكذا

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال يلزم من تشابه المثلثات المذكورة ان تكون ز و : ا ب :: ز ح : ب ج :: و ح : ا ج :: ح ط : ج د ، و ط : ا د :: ط ي : د ه :: و ي : ا ه

وينتج من تساوي هذه النسب ان

ز و : ا ب :: ز ح : ب ج :: ح ط : ج د :: ط ي : د ه :: ي و : ا ه وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم ان الاضلاع المتناسبة في كثيري الاضلاع المتشابهين هي المحيطة بالزوايا المتساوية ويقال لها اضلاع متناظرة والرؤس المتناظرة هي رؤس الزوايا المتساوية

وحيث ان اب ح + ا د ء + ا د هـ يساوى الشكل اب ح د هـ

و و ر ى + و ح ط + و ط ى يساوى الشكل و ر ح ط ى

ينتج أن

الشكل اب ح د هـ . الشكل و ر ط ى . . اب ح : و ر ع

وقد تقرر أن

ا ب ح : و ر ح :: $\overline{اب}^2$. $\overline{ور}^2$

فاذن يكون

الشكل اب ح د هـ : الشكل و ر ح ط ى :: $\overline{اب}^2$. $\overline{ور}^2$

وهو المطلوب

(تنبيه)

ينتج من هذه الطريقة انه اذا انشئت ثلاثة اشكال متشابهة اضلاعها المتناظرة مساوية لاضلاع مثلث قائم الزاوية يكون الشكل المنشأ على الضلع الاكبر مساويا لمجموع الشكلين الآخرين لان هذه الاشكال الثلاثة نسبتها كنسبة مربعات اضلاعها المتناظرة وحيث كان مربع الوتر مساويا لمجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين ينتج من ذلك ان الشكل المنشأ على الضلع الاكبر مساو لمجموع الشكلين الآخرين

(الدعوى التاسعة والعشرون الدائرية شكل ١٣٠)

الوتران مثل اب و ح د المتقاطعان فى دائرة جزءا احدهما متناسبان بالعكس بجزئى الآخر اعنى ان

اهـ . بهـ :: حهـ : هـ ب

(برهانها) ان يقال لو وصل ب د و ا ح لكان المثلثان الحادثان ا ح هـ و ب هـ د متشابهين لان الزاوية هـ مشتركة والزاوية ا = د لوقوعهما فى قطعة واحدة والزاوية ح = ب كذلك ويلزم من تشابه هذين المثلثين ان يكون

والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعي ضلعين متناظرين

(برهان القضية الاولى) ان يقال يلزم من تشابه الشكلين ان يكون

اب . ور :: بح . رح . حد . حط الخ

وقد تقرر في علم الحساب ان نسبة مجموع المقدمات الى مجموع التاليات كنسبة احد المقدمات الى تاليه فاذن يكون

اب + بح + حد + الخ . ور + رح + حط +

الخ . اب : ور

وحيث ان اب + بح + حد + الخ يساوي محيط الشكل

ابحده و ور + رح + حط + الخ يساوي محيط

الشكل ورحطى ينتج ان

محيط الشكل ابحده . محيط الشكل ورحطى :: اب

: ور وهو المطلوب .

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال يلزم من كون المثلث ابح مشابها المثلث ورح ان يكون

ابح ورح : $\overline{اح}^2$. $\overline{وح}^2$

وكذا يلزم من تشابه المثلثين احد و وحط ان يكون

احد : وحط :: $\overline{اح}^2$: $\overline{وح}^2$

ويلزم من اشتراك النسبة الثانية في هاتين المتناسبتين ان يكون

ابح . ورح :: احد . وحط

وعلى هذا يبرهن على ان

احد : وحط :: اده : وطى وهكذا على حسب عدد المثلثات

فينتج من تساوي هذه النسب ان مجموع المقدمات الى مجموع التاليات كنسبة مقدم الى تاليه اي ان

ابح + احد + اده : ورح + وحط + وطى :: ابح

: ورح

وحيث

يقطع الخط اب في نقطة اخرى غير النقطة هـ كالنقطة م مثلا لزم ان يكون

اب × اجـ = اد × ام

والمفروض أن

اب × اجـ = اد × اهـ

فينتج من هاتين المعادلتين أن

اد × ام = اد × اهـ وهو محال

فاذن تكون النقطة هـ على المحيط المار بالنقط جـ و ب و د

وهو المطلوب

(الدعوى الثانية والثلاثون النظرية شكل ١٣٢)

اذا اخذت نقطة مثل هـ خارج دائرة ومد منها مستقيم مماس مثل هـ ا وآخر قاطع مثل هـ جـ كان المماس وسطا متناسبا بين القاطع وجزئه الخارج اعني ان

هـ جـ : هـ ا :: هـ ا : هـ د

(برهانها) ان يقال لو وصل المستقيمان اد و اجـ لكان المثلثان الحادثان هـ ا د و هـ ا جـ متشابهين لان الزاوية هـ مشتركة والزاوية هـ ا د الواقعة بين المماس هـ ا والوتر اد مساوية للزاوية جـ ويلزم من تشابههما ان يكون

هـ جـ : هـ ا :: هـ ا : هـ د وهو المطلوب

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية ان مربع الخط المماس يكافئ المستطيل المكون من الخط القاطع ومن جزئه الخارج اعني ان

$\overline{هـ ا}^2$ = هـ جـ × هـ د

(الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية شكل ١٣٣)

اذا نصفت زاوية مثلث بمستقيم فالمستطيل المكون من ضلعيها

اهـ : ءهـ :: حهـ . بهـ وهو المطلوب

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية ان

اهـ × بهـ = ءهـ حهـ

والمعنى ان المستطيل المكوّن من جزءى احد الوترين يكافىء المستطيل المكوّن من جزءى الوتر الآخر

(الدعوى الثلاثون النظرية شكل ١٣١)

اذا اخذت نقطة مثل هـ خارج الدائرة ومدّ منها قاطعان مثل هـ ب و هـ ح حتى انتهيا بالقوس المقعر بح فالقاطعان الكاملان يكونان متناسبين لعكس جزئيهما الخارجين اعنى يكون

هـب : هـح :: هـء : هـا

(برهانها) ان يقال لو وصل اح و بء لكان المثلثان الحادثان هـ ا ح و هـ ب ء متشابهين لأن الزاوية هـ مشتركة والزاوية ب = ح لوقوعهما فى قطعة واحدة وينتج من تشابههما ان

هـب : هـح :: هـء هـا وهو المطلوب

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية ان

هـب × هـا = هـح × هـء

والمعنى ان المستطيل المكوّن من احد القاطعين وجزئه الخارج عن الدائرة يكافىء المستطيل المكوّن من القاطع الآخر وجزئه كذلك

(الدعوى الحادية والثلاثون النظرية شكل ١٣١ الثانى)

اذا وجدت اربع نقط مثل ب و ح و ء و هـ على مستقيمين متقاطعين مثل اب و اهـ وكان اح × اب = اء × اهـ كانت هذه النقط على محيط دائرة واحدة

(برهانها) ان يقال لو فرض ان المحيط الذى يمر بالنقط ح و ب و ء

يقطع

اى ان المستطيل المكون من ضلعين مثل اب و اح من مثلث مثل
ا ب ح يكافى المستطيل المكون من الارتفاع اى المنزل على ضلعه
الثالث ح ب ومن قطر الدائرة ح ه المرسومة على المثلث المذكور
اعنى ان

اب × اح = اى × ح ه

(برهانها) ان يقال لو وصل أ ه لكان المثلث ا ب ى القائم الزاوية
فى ى مشابها للمثلث ا ه ح القائم الزاوية فى ا لان الزاوية ه
= ب ويلزم من تشابههما ان يكون

اب : ح ه :: اى : اح

ومن هذه المناسبة ينتج أن

اب × اح = اى × ح ه ... (١)

وهو المطلوب

(نتيجة)

اذا ضرب كل من طرفى المعادلة (١) فى ب ح اى الضلع الثالث من
المثلث حدث

اب × اح × ب ح = اى × ح ه × ب ح

وحيث ان مساحة المستطيل المكون من اى و ب ح تساوى ضعف
مساحة المثلث ا ب ح يعلم من ذلك انه اذا ضربت اضلاع مثلث فى بعضها
كان حاصل الضرب مساويا لضعف مساحة المثلث مضروبة فى قطر دائرة
المحيط المار برؤسه

واعلم ان حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة يسمى فى بعض الاحيان مساحة
جسمية وسيأتى بيانه فى المقالة السادسة

(تنبيه)

اعلم انه يمكن ان يبرهن ايضا على ان مساحة المثلث تساوى محيطه اى مجموع
اضلاعه مضروبا فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخله انظر (شكل ٨٧ من

يساوى المستطيل المكون من قسمى الضلع المقابل لها زائدا مربع المستقيم المنصف لها

اى اذا نصفت زاوية مثل ب ا ح من مثلث مثل ا ب ح بمستقيم مثل ا ى كان

ب ا × ا ح = ب ى × ى ح + ا ى ^٢

(برهانها) ان يقال لو رسم محيط دائرة مار برؤس زوايا المثلث ا ب ح ومد الخط ا ى جهة ى حتى انتهى الى محيط الدائرة فى نقطة مثل هـ ووصل هـ ح لكان المثلث الحادث هـ ا ح مشابها للمثلث ب ا ى لانه يلزم من كون الزاوية ب ا ى مساوية للزاوية هـ ا ح بالفرض والزاوية ب مساوية للزاوية هـ لوقوعهما فى قطعة واحدة ان يكون المثلثان المذكوران متشابهين ويلزم من تشابههما ان تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة اى يكون

ا ب . ا هـ :: ا ى : ا ح

وينتج من هذه المتناسبة ان

ا ب × ا ح = ا هـ × ا ى

لكن ا هـ = ا ى + ى هـ فاذا ضرب كل من حدود هذه المعادلة فى ا ى يكون

ا هـ × ا ى = ا ى ^٢ + ا ى × ى هـ

ويلزم من كون

ا ى × ى هـ = ب ى × ى ح

ان يكون

ا ب × ا ح = ب ى × ى ح + ا ى ^٢ وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة والثلاثون المطربة شكل ١٣٤)

المستطيل المكون من ضلعى مثلث يكافى المستطيل المكون من الارتفاع المنزل على ضلعه الثالث ومن قطر الدائرة المرسومة على المثلث المذكور

اى

وايضا الزاوية ب ا و = ب د ح لوقوعهما في قطعة واحدة حينئذ يكون المثلث ا ب و مشابها للمثلث ب د ح وينتج من تشابههما ان

ا ب : ب د :: او : ح د

وينتج من هذه المناسبة ان

ا ب × ح د = او × ب د .... (٢)

فاذا جمعت هذه المعادلة (٢) الى المعادلة (١) حدث

اد × ب ح + ا ب × ح د = او × ب د + ح و × ب د

= (او + ح و) × ب د = ا ح × ب د وهو المطلوب

* (الدعوى السادسة والثلاثون النظرية شكل ١٣٥) *

نسبة احد قطرى الشكل الرباعى المرسوم داخل دائرة الى قطره الآخر كنسبة مجموع المستطيلين المكونين من الاضلاع المتصلة المارة بنهايتي القطر الاول الى مجموع المستطيلين المكونين من الاضلاع المتصلة المارة بنهايتي القطر الآخر اعنى ان

ا ح : ب د :: ا ب × اد + ب ح × د ح : ا ب × ب ح + اد × د ح

(برهانها) ان يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المرسومة على الشكل ثم يقال حيث ان الشكل الرباعى ا ب ح د منقسم بالقطر ا ح الى المثلثين ا ب ح و اد ح يكون

ا ب × ب ح × ا ح = ٤ نق × ا ب ح (كما تقرر في نتيجة النظرية ٣٤)

وايضا يكون

اد × د ح × ا ح = ٤ نق × اد ح وبالجمع يكون

ا ح × (ا ب × ب ح + اد × د ح) = ٤ نق × ا ب ح د

وحيث ان الشكل الرباعى منقسم بالقطر ب د الى المثلثين ا ب د و ح ب د يكون

ب د × (ا ب × اد + ب ح × د ح) = ٤ نق × ا ب ح د

اللوحة ٤)
لان كلا من ارتفاعات المثلثات أ ح ب و ب ح ه و أ ح ه المشتركه
فى الرأس ح يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث أ ب ه
فحينئذ يكون مجموع هذه المثلثات مساويا لمجموع القواعد د ب و ب ه
و اه مضروبا فى نصف نصف القطر ح ى اى فى ربع القطر فقد ثبت
بهذا ان مساحة المثلث أ ب ه تساوى محيطه مضروبا فى ربع قطر الدائرة
المرسومة داخله وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة والثلاثون النظرية شكل ١٣٥)

المستطيل المكون من قطرى شكل رباعى مرسوم داخل دائرة يساوى مجموع
مستطيلى اضلاعه المتقابلة اعى أن

أه × بى = أب × هى + اى × به

(برهانها) ان نؤخذ القوس هه = للقوس اى ونوصل به
الذى يقطع القطر اه فى و فيكون المثلث الحادث به و مشابها
للمثلث أ ب ى لانه يلزم من كون القوس هه مساويا للقوس اد
ان تكون الزاوية ه ب ه أو ه ب و مساوية للزاوية أ ب د وايضا
الزاوية اى ب = أ ه ب او و ه ب لوقوعهما فى قطعة واحدة
فاذن يكون المثلث ب ه و مشابها للمثلث أ ب ى ويلزم من كونهما
متشابهين ان يكون

اى : هو :: بى : به

ومن هذه المناسبة ينتج أن

اى × به = هو × بى ... (١)

ولنبرهن الآن على ان المثلث ا ب و مشابه للمثلث ب ى ه فنقول حيث
كان القوس اى مساويا للقوس هه يكون

اى + ىه = هه + ىه أى اه = ىه

فاذن تكون الزاوية ا ب ه أو ا ب و مساوية للزاوية ى ب ه

وايضا

ويلزم من تواريهما ان تكون الزاوية او ح مساوية للزاوية اهد فاذن يكون

او : اه :: حو . د ه

فاذا ضرب كل حد من هذه المتناسبة في نظيره من التناسبة السابقة يحدث

ا ب × او : او × اه :: ب ح × د ه : حو × د ح

وبقسمة حدى النسبة الاولى على المضروب المشترك او وحدى النسبة الثانية على المضروب المشترك حو يكون

ا ب : اه :: ب ح : د ه او

ب ح : د ه :: ا ب : اه وهو المطلوب

(الدعوى الثامنة والثلاثون النظرية شكل ٤ من اللوحة ١٧)

اذا عممت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر كانت النسبة بين هذين المثلثين كالنسبة بين المستطيلين المكونين من الاضلاع المحيطة بالزاويتين المذكورتين فاذا كانت الزاوية هاد عممة للزاوية ب اح يكون

ا ب ح : اد ه :: ا ب × اح : اد × اه

(برهانها) ان يوضع المثلثان كما هو مبين في (الشكل ٤ من اللوحة ١٧) ثم يوصل ب د فيحدث

ا ب ح . ا ب د :: اح : اد

ا ب د : اد ه :: ا ب : اه .

فاذا ضربت الحدود المتناظرة في بعضها يحدث

ا ب ح × ا ب د : ا ب د × اد ه :: اح × ا ب : اد × اه

وبقسمة حدى النسبة الاولى على المضروب المشترك ا ب د يكون

ا ب ح : اد ه :: اح × ا ب : اد × اه

وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة والثلاثون النظرية شكل ٥ من اللوحة ١٧)

قطرا الشكل الرباعي المرسوم على الدائرة يتقاطعان في نقطة تقاطع المستقيمين

فحينئذ يكون

اجـ × (اب × بجـ + اد × دجـ) = بد ×

(اب × اد + بجـ × دجـ) ويلزم من هذا ان يكون

اجـ : بد :: اب × اد + بجـ × دجـ ٠ اب × بجـ

+ اد × دجـ وهو المطلوب

(الدعوى السابعة والثلاثون النظرية شكل ٣ من اللوحة ١٧)

اذا ساوت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر وكانت احدى الزاويتين الباقيتين من المثلث الاول متممة لنظيرتها من المثلث الآخر كانت النسبة بين الضلعين المقابلين للزاويتين المتساويتين كالنسبة بين الضلعين المقابلين للزاويتين المتممتين لبعضهما

اي اذا ساوت زاوية مثل بـاجـ من مثلث مثل ابجـ نظيرتها مثل د اهـ من مثلث مثل هادهـ وكانت احدى الزاويتين الباقيتين من المثلث الاول مثل الزاوية اجـب متممة لنظيرتها مثل الزاوية ادهـ يكون

بجـ ٠ دهـ :: اب ٠ اهـ

(برهانها) ان يقال لو وضع المثلثان كما هو مبين في الشكل ٣ من اللوحة ١٧) ومد الضلع بجـ على استقامته جهة جـ حتى قطع الضلع اهـ في و لحدث

اب : او :: بجـ : جـو

لان الخط اجـ منصف للزاوية بـاو وقد تقرر في النظرية السابعة عشر ان الخط المنصف لزاوية من مثلث يقسم الضلع المقابل لها الى قسمين متناسبين للضلعين المحيطين بها وحيث كانت الزاوية اجـب متممة للزاوية ادهـ وللزاوية اجـو تكون الزاوية اجـو مساوية للزاوية ادهـ ويلزم من هذا ان يكون الخط جـو موازيا للخط دهـ كما تقرر ذلك في المقالة الاولى

ويلزم

:: م : ن وكانت نقطة اخرى مثل د على استقامته وكان ايضا

اد : ب د :: م : ن .

كانت النسبة بين اى مستقيمين موصولين من النقطتين ا و ب الى اى
نقطة من نقط المحيط الذى قطره حد ثابته ومساوية لنسبة م : ن

(برهانها) ان يقال يلزم من كون

اد : ب د :: اح : ب ح :: م : ن

ان يكون

اد + اح : ب د + ب ح :: اد ـ اح : ب د ـ ب ح

:: م : ن

لانه قد تقرر فى علم الحساب ان نسبة مجموع المقدمين الى مجموع التاليين
كنسبة فاضل المقدمين الى فاضل التاليين فاذا رمز بالحرف و لمركز
الدائرة حدث

٢ او : ٢ حو :: ٢ حو : ٢ بو :: م : ن

وبقسمة حدود النسبتين الاوليين على ٢ وابدال حو بمساويه كو
تؤول هذه المتناسبة الى

او : كو :: كو : بو :: م : ن

فاذن يكون المثلث اكو مشابها للمثلث بكو ويلزم من تشابههما
ان يكون

اك : بك :: او : كو او

اك : بك :: م : ن وهو المطلوب

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية انه لو وصل الخط كح لانقسمت الزاوية اكب الى
قسمين متساويين ولو وصل الخط كد لانقسمت الزاوية بكه الى
قسمين متساويين كذلك

(تنبيهات)

الموصولين بين نقط تماس اضلاعه المقابلة

(برهانها) ان يوصل القطر هر والمستقيمان اح و ـــ ى ثم يبحث عن النسبة الكائنة بين البعدين هط و رط اللذين هما بعدا نقطة تقاطع المستقيمين هر و ـــ ى عن النقطتين ه و ر ثم يبحث ايضا عن النسبة الكائنة بين البعدين هطَ و رطَ اللذين هما بعدا نقطة تقاطع المستقيمين هر و اح عن النقطتين المذكورتين ه و ر بان يقال حيث ان فى المثلثين ـــ طه و ى طر زاوية ـــ طه = زاوية ىرط وان الزاوية هـ ـــ ط متممة للزاوية طىر يكون

هـ ـــ : ىر :: هط : طر (كما تقرر ذلك فى النظرية السادسة والثلاثين)

ويحدث ايضا من المثلثين اطه و حطر ان

اه : حر :: هطَ : طَر

وحيث تقرر فى المقالة الثانية ان

اه = هـ ـــ و حر = رى

يعلم من ذلك ان

هط : طر :: هطَ : طَر

وان النقطة طَ هى النقطة ط بعينها وان القطر هر يمر بنقطة تقاطع المستقيمين ـــ ى و اح

وبمثل هذا يبرهن على ان القطر حو يمر ايضا بنقطة تقاطع المستقيمين المذكورين ـــ ى و اح

فقد ثبت بهذا ان الخطوط المستقيمة الاربعة وهى هر و حو و اح و ـــ ى تتقاطع فى نقطة واحدة وهو المطلوب

(الدعوى الاربعون النظرية شكل ٦ من اللوحة ١٧)

اذا وقعت نقطة مثل ح على مستقيم معلوم مثل ا ـــ وكانت اح : حـ ـــ

::

اللوحة ١٧ يرى انه متوافق التقسيم فى النقطتين ب و ا وان النقطتين ح و د ايضا متوافقتى الاقتران فى الخط ا ب
وبالجملة فالمستقيم المنصف لزاوية مثلث والمستقيم المنصف لمجاورتها يجعلان الضلع المقابل لها متوافق التقسيم

(التنبيه الثانى)

اذا علمت نقطة مثل ا على قطر دائرة مثل القطر حد (كما فى الشكل ٦ من اللوحة ١٧) وكان المطلوب ايجاد النقطه المتوافقة الاقتران بها فى الخط حد فطريقة ذلك ان يوصل مستقيمان من نقطة من المحيط مثل ك الى النقطتين ا و ح ثم تنشأ زاوية حكب = اكح فتكون النقطة ب متوافقة الاقتران بالنقطة ا وبمثل هذه العملية تعين النقطه ا اذا كانت النقطة ب معلومة

(التنبيه الثالث)

يمكن ايضا ايجاد النقطة ب بان يمد من النقطة ا المماس اى ثم ينزل من النقطه ى عمود على القطر حد فيقطعه فى النقطة المطلوبة
لانه لو وصل ىح لكانت الزاوية اىح = للزاوية بىح كما تقرر ذلك فى المقالة الثانية

(الدعوى الحادية والاربعون النظرية شكل ٨ من اللوحة ١٧)
اذا اخذت نقطة مثل ع فى مستوى مثلث مثل ابح وانزل منها اعمدة مثل عد و عه و عو على اضلاعه بح و حا و اب كان مجموع مربعات الاجزاء الثلاثة غير المتجاورة مثل حه و بد و او مساويا لمجموع مربعات الاجزاء الثلاثة الاخر وهى اه و حد و بو اعنى ان

$$\overline{حه}^2 + \overline{بد}^2 + \overline{او}^2 = \overline{اه}^2 + \overline{حد}^2 + \overline{بو}^2$$

(برهانها) ان يقال لو وصل عا لحدث

(التنبيه الاول في نسب لازمة)*

اذا قسم مستقيم مثل اب الى جزئين مثل اح و حب كما في الشكل ٧ من اللوحة ١٧ باى كيفية كانت سمى هذان الجزآن قسمى المستقيم اب وايضا اذا اخذت نقطة مثل ى على استقامة اب فالجزآن اى و بى يسميان ايضا قسمى المستقيم اب وقسما الحالة الاولى اى التى فيها نقطة التقسيم موضوعة بين الطرفين ا و ب يعبران بالقسمين الجمعيين وقسما الحالة الثانية اى التى فيها النقطة المذكورة على استقامة اب لا بين طرفيه يعبران بالقسمين الطرحيين ولو قسم المستقيم اب فى نقطة ح بحيث يكون اح . بح . م : ن وتحصل ايضا من تعيين النقطة ى عليه متناسبة بهذه الصورة اى : بى :: م . ن كان المستقيم اب متوافق التقسيم فى النقطتين ح و ى وكانت النقطتان ح و ى متوافقتى الاقتران بالنسبة للمستقيم اب . ولا شيرالى هذه النسبة م : ن فى المتناسبتين السابقتين يكون

اى : بى :: اح بح

وبتغيير محل الوسطين يكون

اى . اح :. بى :: بح . (١) .

ونعلم من هذه المتناسبة ان الخط حى متوافق التقسيم ايضا فى النقطتين ب و ا وان النقطتين ب و ا متوافقتى الاقتران فى الخط حى واذا سووى حاصل ضرب طرفى المتناسبة (١) بحاصل ضرب وسطيها حدث

$$اى \times بح = اح \times بى$$

ونعلم من هذه المعادلة انه اذا كان المستقيم متوافق التقسيم كان حاصل ضرب الخط الكلى فى جزئه المتوسط مساويا لحاصل ضرب جزئيه المتطرفين واذا نظر للخط حى الذى هو قطر الدائرة المرسومة فى الشكل ٦ من اللوحة

فالاعمدة المقامة على اضلاع المثلث من النقط د و هـ و و تتقاطع فى نقطة واحدة

لانه ان قيل قد لا تتقاطع فى نقطة واحدة يقال لو ارسل من النقطة ح التى هى تقاطع العمودين ح د و ح هـ عمود على ا ب لقطعه فى وَ ويلزم من هذا ان يكون

$$\overline{جه}^2 + \overline{بد}^2 + \overline{اوَ}^2 = \overline{اه}^2 + \overline{جد}^2 + \overline{بوَ}^2$$

ولو طرحت هذه المعادلة من المعادلة المفروضة لحدث

$$\overline{او}^2 - \overline{اوَ}^2 = \overline{بو}^2 - \overline{بوَ}^2 \quad \text{او}$$

$$\overline{او}^2 + \overline{بوَ}^2 = \overline{اوَ}^2 + \overline{بو}^2$$

وهذه معادلة محالة لان او اصغر من اوَ و بوَ اصغر من بو

(التنبيه الثانى)

اعلم ان هذه الطريقة يمكن تطبيقها على الشكل الرباعى وعلى اى مضلع مستو واما ما ذكر فى التنبيه الاول ولا يتأتى الا فى المثلث فقط

(الدعوى الثانية والاربعون الطريقة شكل ٩ من اللوحة ١٧)

اذا قطع مثلث مثل ا ب ج بقاطع مثل و د هـ حدث

$$او \times بد \times جه = بو \times جد \times اه$$

(برهانها) ان يقال لو مد من النقطة ب مستقيم مثل ب ك يوازى ا ج لحدث

$$او : بو :: اه : بك \quad و$$

$$بد : جد :: بك : جه$$

وقد تقرر فى علم الحساب انه اذا ضربت حدود متناسبة هندسية فى نظائرها من متناسبة اخرى كانت الحواصل الناتجة متناسبة فاذن يكون

$$او \times بد : بو \times جد :: اه \times بك : بك \times جه$$

$\overline{حه}^2 + \overline{ها}^2 = \overline{اج}^2$ و

$\overline{حو}^2 + \overline{وا}^2 = \overline{اج}^2$

فينتج من هاتين المعادلتين ان

$\overline{حه}^2 + \overline{ها}^2 = \overline{حو}^2 + \overline{وا}^2 \quad .... \quad (١)$

ولو وصل حب و حج لحدث ايضا

$\overline{حه}^2 + \overline{هج}^2 = \overline{حد}^2 + \overline{دج}^2 \quad .... \quad (٢)$ و

$\overline{حد}^2 + \overline{دب}^2 = \overline{حو}^2 + \overline{وب}^2 \quad .... \quad (٣)$

من المعادلة (١) ينتج ان

$\overline{وا}^2 = \overline{حه}^2 + \overline{ها}^2 - \overline{حو}^2$

ومن المعادلة (٢) ينتج ان

$\overline{هج}^2 = \overline{حد}^2 + \overline{دج}^2 - \overline{حه}^2$

ومن المعادلة (٣) ينتج ان

$\overline{دب}^2 = \overline{حو}^2 + \overline{وب}^2 - \overline{حد}^2$

فلو جمعت هذه المعادلات الثلاث بالترتيب واختصرت حدود حاصل الجمع لحدث

$\overline{جه}^2 + \overline{بد}^2 + \overline{او}^2 = \overline{ها}^2 + \overline{دج}^2 + \overline{وب}^2$ وهو المطلوب

ويمثل هذا يبرهن على ان هذه النظرية صحيحة ولو كانت النقطة ح خارجة عن المثلث (كما هو مبين في الشكل ٨ الثاني من اللوحة ١٧)

(تنبيهان)

الاول اذا قسمت اضلاع مثلث في النقط د و ه و و وكان

$\overline{جه}^2 + \overline{بد}^2 + \overline{او}^2 = \overline{اه}^2 + \overline{دج}^2 + \overline{بو}^2$

ومستقيم هك يوازى اب لحدث عنهما متناسبات وحيث كان للمثلثين اب ى و ا ى ح ارتفاع مشترك يكون

ا ب ى : ا ى ح :: ب ى : ى ح

ويلزم من اشتراك الارتفاع فى المثلثين ب ج ى و ح ج ى ان يكون

ب ج ى : ح ج ى :: ب ى : ى ح

فينتج من ذلك أن

ا ج ب . ا ج ح :: ب ى : ى ح

و بمثل هذا يبرهن على ان

ب ج ح : ا ج ب :: ح هـ : ا هـ و

ا ج ح : ب ج ح :: ا و : ب و

فلو ضربت حدود هذه المتناسبات بالترتيب لحدث

ا ج ب × ب ج ح × ا ج ح : ا ج ح × ا ج ب × ب ج ح

:: ب ى × ح هـ × ا و : ى ح × ا هـ × ب و

ويلزم من كون ا ج ب × ب ج ح × ا ج ح = ا ج ح × ا ج ب × ب ج ح ان يكون

ب ى × ح هـ × ا و = ى ح × ا هـ × ب و

وهو المطلوب

(التنبيه الثانى)

اعلم ان هذه الطريقة صحيحة ولو كانت النقطة ج خارجة عن المثلث وفى هذه الحالة توجد احدى نقط التقاطع على احد اضلاع المثلث والنقطتان الاخريان على امتدادى الضلعين الاخرين كما هو مبين فى الشكل ١٠ الثانى و ١٠ الثالث من اللوحة ١٧

(الدعوى الرابعة والاربعون المطريقة)

اذا قسمت اضلاع مثلث بثلاث نقط وكان حاصل ضرب الاجزاء الثلاثة غير المتجاورة مساويا لحاصل ضرب الأجزاء الثلاثة الاخرى كانت النقط الثلاث

وبقسمة حدى النسبة الثانية على المضروب المشترك بء يكون

او × بى : بو × جى :: اه : جه

ومن هذه المناسبة ينتج أن

او × بى × جه = بو × جى × اه

وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم ان هذه النظرية صحيحة ولو قطع ه و امتدادات الاضلاع اج و جب و اب وليس هناك حالة اخرى

(الدعوى الثالثة والاربعون النظرية شكل ١٠ من اللوحة ١٧)

اذا احدث نقطة مثل ح فى مستوى مثلث مثل ابج ووصل منها لرؤسه ا و ب و ج خطوط مستقيمة حا و حب و حج ومدت حتى قطعت اضلاع المثلث فى نقط مثل ى و ه و و حدث

او × بى × جه = بو × جى × اه

(برهانها) ان يقال يلزم من كون المثلث ابى مقطوعا بالقاطع جحو ان يكون

او × بج × ىح = به × جى × اح

ومن كون المثلث اىج مقطوعا بالقاطع بحه ان يكون

جه × بى × اح = اه × جب × ىح

ولو ضربت هاتان المعادلتان واختصرت حدود حاصل الضرب لحدث

او × بى × جه = بو × جى × اه

وهو المطلوب

(تنبيهان)

الاول يمكن ان يبرهن على صحة هذه النظرية بطرق اخرى لا تبنى على النظرية السابقة

وبيان ذلك ان يقال لو مد من النقطة ه مستقيم هء يوازى بج

ومستقيم

اكان القاطع الثانى موازيا للقاطع الاول ـــهـ

واما اذا كان القاطع الثانى كيفما اتفق مثل ـــهَ

ـــ مستقيم مثل ســـصـ يوازى اح ومدّ

د ا فى سـ و اد فى صـ لحدث

∴ ـــهـ : حهـ و

∴ ـــد : حد والمفروض أن

∴ ـــد : حد

ـ أن ســـ = ـــصـ

ســـ موازيا للخط اح ان يكون

∴ ـــهَ : حهَ و

∴ ـــدَ : حدَ

= ـــصـ ان يكون

∴ ـــدَ : حدَ

قمة الاربعة وهى اـــ و اح و اد و اهـ

وافقية والمستقيمين اـــ و اح يسميان خطين

اد و اهـ وكذا عكسه

(تنبيهان)

حزمة توافقية من الخطوط المستقيمة الاربعة وهى

و اهـ اذا كان البعد المحصور بين النقطة ـــ

د بالمستقيم المار بالنقطة ـــ والموازى للمستقيم

بين النقطة ـــ ونقطة تلاقى الموازى المذكور

اكان ـــصـ = ـــســـ يتكون من الخطوط

اح و اد و اهـ حزمة توافقية لانه قد تقرران

على مستقيم واحد واذا وصل من ثلاث النقط الى رؤس المثلث خطوط مستقيمة تقاطعت هذه الخطوط فى نقطة واحدة فالخاصية الاولى تقع عندما يكون عدد النقط المفروضة على اضلاع المثلث عددا زوجيا وعدد النقط المفروضة على امتداداتها عددا فرديا والخاصية الثانية تقع عندما يكون عدد النقط المفروضة على اضلاع المثلث عددا فرديا وعدد النقط المفروضة على امتداداتها عددا زوجيا

(وبرهان) هذه النظرية كالمقرر فى النظرية الحادية والاربعين فتامل

(تنبيهان)

الاول اعلم ان السبب الموجب لتقرير هذه النظريات هنا وكثرة استعمالها فى البرهنة على كثير من النظريات المهمة وحل كثير من العمليات

(التنبيه الثانى)

اعلم ان من النظريات المقررة فى ملحقات المقالة الاولى ما يمكن البرهنة عليه بواسطة ما تقرر فى التنبيه الاول من النظرية الحادية والاربعين وهى نظرية ٣٣ ونظرية ٣٤ ومنها ما يمكن البرهنة عليه بواسطة النظرية الرابعة والاربعين التى نحن بصددها وهى نظرية ٣٢ ونظرية ٣٥ لكن المقصود من وضع النظريات فى الملحقات البرهنة عليها بواسطة نظريات مقررة فى مقالة تلك الملحقات فقط

(الدعوى الخامسة والاربعون النظرية شكل ١١ من اللوحة ١٧)

اذا اخرجت اربع خطوط مستقيمة مثل اب و اد و اح و اه من نقطة واحدة مثل ا وقطعت مستقيما مثل به فى نقط مثل ب و د و ح و ه وكان

به : حه :: بد : حد

فهذه الخطوط تقسم اى خط مستقيم قطعته الى اقسام توافقية سواء كان ذلك الخط موازيا للخط به اوغير موازله مثل بَهَ بحيث يكون

بَهَ : حَهَ :: بَدَ : حَدَ

(برهانها)

(تنبيهان)

الاول اذا مد من النقطة ح جملة خطوط مستقيمة ووصلت اقطار الاشكال الرباعية المتحصلة كانت نقط تقاطع تلك الاقطار على خط مستقيم واحد هو المستقيم الاقترانى للنقطة ح بالنسبة للخطين اب و اح

الثانى حين تكون النقطة المعلومة ح خارجة عن الزاوية يكون المستقيم الاقترانى داخلها وحين تكون النقطة ح داخلها يكون المستقيم الاقترانى خارجها

(الدعوى السابعة والاربعون السطرية)
(شكل ١٣ من اللوحة ١٧)

اذا اخذت نقطة مثل ا فى مستوى دائرة ومد منها قواطع مثل اب ح ومد من نهايتى كل وتر حاصل من تلك القواطع كالنهايتين ب و ح مستقيمان مماسان لمحيط الدائرة مثل بد و حد المتقاطعان فى د فجميع النقط المتحصلة بالكيفية التى تحصلت بها النقطة د تكون على مستقيم واحد

(برهانها) ان يقال لو وصل القطر اح وانزل من النقطة د العمود ده على القطر اح لكانت النقط الثلاث وهى ب و ح و ه على محيط الدائرة الذى قطره دح فاذن يكون

اب × اح = اه × اح

ولو فرض انه مد من النقطة ا مستقيم قاطع للمحيط فى نقطتين رمز احداهما بَ ورمز الاخرى حَ لتحصل ايضا

ابَ × احَ = اهَ × اح

و (هَ رمز لموقع العمود المنزل على اح من نقطة تقاطع مماسين اخرين) وقد تقرر فى النظرية الثلاثين أن

اب × اح = ابَ × احَ فاذن يكون

ب ى : ى ح :: ب ص : ا ح وان
ب هـ : ح هـ :: ب س : ا ح

وحيث كان ب ص = ب س ينتج من هاتين المتناسبتين أن

ب ى : ى ح :: ب هـ : ح هـ

وهذه المتناسبة تثبت توافق القسمة وهو المطلوب

(التنبيه الثانى)

قد لا يعتبر الا نقطة مثل ب على احد هذه الخطوط المستقيمة وحينئذ تسمى النقطة ب والمستقيم ا ح نقطة ومستقيما اقترانيين

(الدعوى السادسة والاربعون النظرية شكل ١٢ من اللوحة ١٧)

اذا احدث نقطة مثل ع فى مستوى زاوية مثل ب ا ح ومد منها قاطعان مثل ع ب ح و ع ى هـ المماسان للشكل الرباعى ب ح هـ ى كانت نقطة تقاطع قطريه وهى ى على المستقيم التوافقى الاقترانى للنقطة ع بالنسبة للمستقيمين ا ب و ا ح

(برهانها) ان يقال يلزم من كون اضلاع المثلث ا ب ح مقطوعة بالقاطع ع ى هـ ان يكون

ع ح × ا هـ × ب ى = ع ب × ح هـ × ا ى

ولو وصل ا ى الذى يقطع ع ح فى و و ع هـ فى ص لظهر ان الخطوط المستقيمة الثلاثة وهى ح ى و ب هـ و ا و متقاطعة فى نقطة واحدة هى ى ويلزم من هذا ان يكون

ح و × ا هـ × ب ى = ب و × ح هـ × ا ى

فاذا قسمت هذه المعادلة على السابقة كل طرف على نظيره وحذفت المضاريب المشتركة حدث

$$\frac{ع ح}{ح و} = \frac{ع ب}{ب و}$$

فاذن يكون ا ى هو المستقيم الاقترانى للنقطة ع بالنسبة للمستقيمين ا ب و ا ح وهو المطلوب

(تنبيهات)

العمود ده منصفا للزاوية ـه ح ويلزم من
ـح متوافق القسمة في النقطتين ١ و ـ وهو

وى الثامنة والاربعون النظرية)*
(شكل ١٤ من اللوحة ١٧)
، ا في مستوى دائرة ومقدمها اقراطع مثل ا ـح
ـ ح و ـح فنقط التقاطع التي مثل ـ اى
هذه الخطوط مثنى تكون على مستقيم واحد

، لو مد من النقط ـ و ح و ـ و ح خطوط
رة ووصل صـ ـ للزم أن تكون النقطة ـ على
كما تقرر ذلك في النظرية التاسعة والثلاثين
السابقة انه ادامدت قواطع اخر كان المستقيم الموصول
ات الجديدة هو صـ ـ بعينه وكانت نقطة القاطع
طوط المستقيمة التي مثل ـ ح و ـح على صـ ـ
قط التي مثل ـ على خط مستقيم وهو المطلوب

الذي يصل بين النقطتين ـ و ـ يقطع الذي يصل
ح في نقطة من المستقيم صـ ـ بعينه ويبرهن

(تنبيهات)
، النقطة المعلومة خارجة عن الدائرة فالخط الذي يشتمل
، مثل ـ يقطع الدائرة وحين تكون النقطة المعلومة
، المستقيم المذكور خارجها
ط المستقيم والنقطة الذين سميناهما في النظرية ٤٥
و ٤٨ بالخط الاقتراني والنقطة الاقترانية هما المسميان

اهـ = اهَ ويعلم من ذلك ان موقع العمود المرسل على اح من نقطة تقاطع المماسين الجديدين يقع فى النقطة هـ حينئذ جميع النقط التى مثل د تكون على العمود المقام على القطر اح من النقطة هـ التى تعين بهذا الارتباط

اهـ = اب×اح / اح = اك² / اح

و اك هو المماس الممتد من النقطة ك اى ان بعد النقطة هـ عن النقطة ا يساوى الثالث المتناسب مع الخطين اح و اك

(تنبيهات)

الاول حين تكون النقطة المفروضة ا خارجة عن الدائرة فالخط د هـ يقطع هذه الدائرة وحين تكون النقطة ا داخل الدائرة فالخط د هـ يكون خارجها

الثانى اعلم ان النقطة ك التى هى نقطة تماس الدائرة بالمماس الممتد من النقطة ا تكون على المستقيم د هـ لان بعد النقطة ا عن موقع العمود المرسل من النقطة ك على اح هو ايضا ثالث متناسب مع المستقيمين اح و اك

الثالث بمقتضى التنبيه الثالث من النظرية الاربعين يكون القطر سـ صـ متوافق القسمة فى النقطتين ا و هـ

الرابع الوتر بـ د متوافق القسمة ايضا فى النقطتين ا و ي لانه لو وصل بـ هـ و د هـ لحدث

اد : د هـ :: اصـ : صـ هـ و

ابـ : بـ هـ :: اصـ : صـ هـ

فينتج من هاتين المتناسبتين ان

اد : د هـ :: ابـ : بـ هـ أو

اد : ابـ :: د هـ : بـ هـ

فيعلم من ذلك ان اهـ هو الخط المنصف للزاوية بـ هـ د المنفرجة للزاوية

(في الدعاوى العملية المعلقة بالمقالة الثالثة)

(الدعوى الاولى العملية)

شكل ١٣٧ الاول والثاني والثالث و ١٣٨ الاول والثاني والثالث

اذا كان المطلوب تقسيم مستقيم محدود مثل المستقيم اب الى اقسام متساوية قدر ما يراد فلذلك طرق

(الطريقة الاولى)

ان يرسم من احدى نهايتي الخط مستقيم غير محدود مثل ال يصنع مع المستقيم المعلوم زاوية ما مثل لاب ثم يؤخذ من المستقيم ال بعد كيف اتفق مثل اح ويكرر على المستقيم ال بقدر عدد الاقسام المطلوبة ثم يوصل مستقيم بين نهاية القسم الاخير والنهاية الاخرى من المستقيم المعلوم ويرسم من النقطة ح مستقيم يوازي له فيتعين على المستقيم المعلوم فيهم مثل اع يساوي احد الاقسام المطلوبة

فاذا كان المطلوب تقسيم المستقيم اب الى خمسة اقسام متساوية مثلا يكرر البعد اح على المستقيم ال خمس مرات اي يؤخذ البعد دح = حا ثم البعد هد = دح و وه = هد و رو = وه ثم يوصل المستقيم رب ويرسم من النقطة ح مستقيم حع يوازي رب فيكون اع = $\frac{اب}{٥}$

وهذه الطريقة مؤسسة على الطريقة الخامسة عشر

(الطريقة الثانية شكل ١٣٧ الثاني)

ان يرسم من النهاية ا مستقيم غير محدود مثل ال يصنع مع المستقيم المعلوم اب زاوية ما ثم يرسم من النهاية ب مستقيم آخر غير محدود كذلك مثل بلَ يوازي المستقيم ال ويضاده في الاتجاه بحيث يصنعان مع المستقيم اب زاويتين متبادلتين داخلتين متساويتين ثم يؤخذ بعد كيف اتفق مثل اح ويوضع على ال بالابتداء من النهاية ا وعلى المستقيم

عند بعض المؤلفين بالقطبين العكسيين وللهدين القطبين خواص اخر مهمة
جدا مشروحة فى الدروس الهندسية التى ألفها المهندس بونسليير
ثالث اعلم أن السبب الموجب لتقرير هذه النظريات عقب المقالة الثالثة
وان كثيرا من المسائل المقررة فى الملحقات يتوقف حلها عليها

(الطريقة الاولى شكل ١٣٨)

ان يرسم من النقطة ا مستقيم غير محدود مثل اد يصنع مع المستقيم المعلوم زاوية مّا ثم يؤخذ عليه بعد اح = ك وبعد حى = م وبعد ىه = ل ويوصل هب ثم يرسم من النقطة ى مستقيم ىو يوازى هب ويرسم من النقطة ح مستقيم حع يوازى هب فينقسم المستقيم اب الى الاقسام المطلوبة

لانه يلزم من كون الخطين اب و اه مقطوعين بالمتوازيات حع و ىو و هب ان يكون

اع : اح :: عو : حى :: وب : ىه

كما تقرر ذلك فى الطريقة الخامسة عشر

وحيث كان اح = ك و حى = م و ىه = ل يكون

اع : ك :: عو : م :: وب : ل وهو المطلوب

(الطريقة الثانية شكل ١٣٨ الثالث)

ان يرسم من النهاية ا مستقيم غير محدود مثل اد يصنع مع المستقيم المعلوم اب زاوية ما ثم يرسم من النهاية ب مستقيم يوازى اد ويضاده ثم يؤخذ البعد اح = ك والبعد حى = م والبعد ىه = ل

ويؤخذ ايضا البعد بىَ = ىه = ل والبعد ىَحَ = ىح = م والبعد حَاَ = حا = ك ثم يوصل اَا و حَح و ىَى و هب فتكون الاقسام المطلوبه هى اع و عو و وب وهذه الطريقة مختارة عن سابقتها

(تنبيه)

اذا علم مستقيم محدود مثل اب وكان المطلوب تقسيمه الى قسمين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة طول معلوم مثل م الى طول آخر معلوم كذلك مثل ك فطريقة ذلك ان يرسم من النقطة ا مستقيم غير محدود

ـ لَ بالابتداء من ب ويكرر خمس مرات على كليهما

اى يؤخذ د ح = ح ا و هـ د = د ح و و هـ = هـ د و ب و = و هـ ثم يؤخذ هـ وَ = وَ ب و د هـَ = هـ وَ و ح دَ = د هـَ و ا حَ = ح دَ ثم يوصل ا اَ و ح حَ و د دَ و هـ هـَ و و وَ ب بَ فينقسم المستقيم المعلوم ا ب الى خمسة اقسام متساوية اعنى ان اقسام ا ح و ح ط و ط ى و ى ك و ك ب متساويه وهذه الطريقة احسن من الاولى واكثر منها استعمالا

(الطريقة الثالثة شكل ١٣٧ الثالث)

ان يرسم على المستقيم المعلوم ا ب مثلث متساوى الاضلاع مثل ح ا ب ويؤخذ على احد اضلاعه مثل ا ح بعد كيف اتفق مثل ح د ويمد ح ا على استقامته جهة ا (ان احتيج لمده) ويكرر ح د خمس مرات اى يؤخذ البعد ح اَ = ٥ ح د ثم يرسم على ح اَ مثلث متساوى الاضلاع ح اَ بَ ويؤخذ البعد حَ اَ = ح د والبعد طَ حَ = حَ اَ و ىَ طَ = طَ حَ و كَ ىَ = ىَ طَ ثم يوصل ح حَ و ح طَ و ح ىَ و ح كَ فينقسم الخط ا ب الى خمسة اقسام متساوية وهى ا ح و ح ط و ط ى و ى ك و ك ب

لانه قد تقرر فى المطوبة الثانية والعشرين انه اذا وصل من رأس مثلث الى قاعدته خطوط مستقيمة قدر ما يراد وهذه الخطوط تقسم قاعدة المثلث وما وازاها الى اجزاء متناسبة وانه اذا انقسمت القاعدة الى اجزاء متساوية ينقسم ما وازاها الى اجزاء متساوية

واذا كان المطلوب تقسيم المستقيم ا ب الى اقسام مناسبة لاطوال معلومة مثل ن و م و ل فلذلك طريقتان

(الطريقة

فالطريقة ان يقسم المستقيم المعلوم الى ثلاثة اقسام متساوية ويكرر احد تلك الاقسام سبع مرات فيحصل المطلوب

(الدعوى الثانية العملية)

(شكل ١٣٩ الاول والثاني والثالث)

اذا علمت ثلاثة خطوط مستقيمة مثل ا و ب و ح وكان المطلوب ايجاد مستقيم يكون رابعا متناسبا مع الخطوط المعلومة فلذلك طرق

(الطريقة الاولى)

ان ترسم زاوية مثل هدو ثم يؤخذ على ده البعد در = ا والبعد دح = ب وعلى دو يؤخذ دب = ح ثم يرسم من النقطة ح مستقيم مثل حط يوازي رب فيكون دط هو الرابع المتناسب المطلوب

لانه يلزم من كون الخط حط موازيا للخط رب ان يكون

در : دح :: دب : دط

وحيث كان در = ا و دح = ب و دب = ح يكون

ا : ب :: ح : دط والمطلوب ان يكون

ا : ب :: ح : س

فاذن يكون س = دط وهو المطلوب

(الطريقة الثانية شكل ١٣٩ الثاني)

ان ترسم زاوية مثل هدو ثم يؤخذ على ده البعد در = البعد ا ويحاذيه رح = ب ويؤخذ على دو البعد دب = ح ثم يوصل رب ويرسم من النقطة ح مستقيم حط يوازي رب فيكون بط هو الرابع المتناسب المطلوب

لانه يلزم من كون الخط رب موازيا للخط حط ان يكون

در : رح :: دب : بط

وحيث كان در = ا و رح = ب و دب = ح يكون

ا : ب :: ح : بط والمطلوب ان يكون

مثل ال كما فى الشكل ١٣٨ الثانى ويؤخذ عليه اد = م ثم يرسم من النقطة ب مستقيم غير محدود مثل بل وعليه يؤخذ بدَ = ن ثم يوصل دَدَ فينقسم المستقيم اب فى النقطة ح الى القسمين المطلوبين اعنى ان

اح : حب :: م : ن

لانه يلزم من كون الزاوية ا = ب و احد = بحدَ ان تكون الزاوية ادح = بدَح وان يكون المثلث ادح مشابها للمثلث بدَح ويلزم من تشابههما ان يكون

اح : حب :: اد : بدَ

وحيث كان اد = م و بدَ = ن يكون

اح : حب :: م : ن وهو المطلوب

(مثالان)

(المثال الاول)

ان يكون المطلوب تقسيم مستقيم محدود الى ثلاثة اجزاء مناسبة لثلاثة اعداد مفروضة مثل ٢ و ٣ و ٤

فالطريقة ان يقسم المستقيم المعلوم الى اجزاء متساوية عددها ٢ + ٣ + ٤ = ٩ اى يقسم الى اجزاء متساوية عددها يساوى مجموع الاعداد المفروضة ثم يؤخذ القسم الاول مع الثانى لتكوين الجزء الاول من الاجزاء المطلوبة ويؤخذ القسم الثالث والرابع والخامس لتكوين الجزء الثانى ومابقى من الخط يكون هو الجزء الثالث

(المثال الثانى)

ان يكون المطلوب ايجاد حاصل ضرب مستقيم محدود فى كسر معين كالكسر $\frac{٧}{٢}$

فالطريقة

$$ن \times ع = نَ \times س$$

وقد تقرر فى علم الحساب انه اذا كان حاصل ضرب كميتين مساويا لحاصل ضرب كميتين يتركب من الكميات الاربع متناسبة هندسية طرفاها كميتا احد الحاصلين ووسطاها كميتا الحاصل الاخر فاذن يكون

$$نَ : ن :: ع : س$$

فيعلم من هذه المتناسبة ان ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع المتناسب الهندسى للخطوط الثلاثه المعلومة التى هى نَ و ن و ع فاذا اجريت عملية استخراجه لم يبق الا عملية انشاء المستطيل الذى علم كل من قاعدته وارتفاعه وقد ذكرنا عملية ذلك فى الدعوى الثانية عشر العملية من المقالة الثانية

(المثال الثانى)

ان يكون المطلوب انشا مستطيل على خط معلوم تكون مساحته مساوية لمساحة مثلث معروض فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف م للمثلث المفروض وبالحرف ن لقاعدته وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف مَ للمستطيل المطلوب وبالحرف نَ لقاعدته المساوية للخط المعلوم وبالحرف س لارتفاعه المطلوب ثم يقال حيث ان كل مثلث مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى نصف ارتفاعه وكل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه يكون

$$م = ن \times \frac{1}{2} ع \quad و \quad مَ = نَ \times س$$

وحيث كان المطلوب ان يكون م = مَ يلزم ان يكون

$$ن \times \frac{1}{2} ع = نَ \times س$$

وهذه المتساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

$$نَ : ن :: \frac{1}{2} ع : س$$

ا . ب :: ﻫ . س

فاذن يكون س = ح ط وهو المطلوب

(الطريقة الثالثة شكل ١٣٩ الثالث)

ان يرسم مستقيم غير محدود مثل ء ﻫ ثم يؤخذ عليه البعد ء ر = ا و ء ح = ب ثم يرسم من النقطة ر مستقيم غير محدود مثل ر ك يصنع مع المستقيم ء ﻫ زاوية ما ثم يؤخذ البعد ر ے = ﻫ ثم يوصل ے ء ويمد من النقطة ح مستقيم مثل ح ط يوازي ر ے فيكون ح ط هو الرابع المتناسب المطلوب

لانه يلزم من كون الخط ح ط موازيا للخط ر ے ان يكون

ء ر : ء ح :: ر ے : ح ط

وحيث كان ء ر = ا و ء ح = ب و ر ے = ﻫ يكون

ا : ب :: ﻫ : ح ط والمطلوب ان يكون

ا : ب :: ﻫ : س

فاذن يكون س = ح ط وهو المطلوب

(امثلة)

(المثال الاول)

ان يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم بحيث تكون مساحته مساوية لمساحة مستطيل معلوم وطريقة ذلك ان يرمز بالحرف ق لقاعدة المستطيل المعلوم وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف قَ للخط المعلوم الذي يفرض قاعدة للمستطيل المطلوب وبالحرف س لارتفاعه ثم يقال حيث ان كل مستطيل مساحته تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه يكون

م = ق × ع و مَ = قَ × س

وحيث كان المطلوب ان يكون مَ = م يلزم ان يكون

ق × ع

لقاعدته وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف مَ لمساحة المثلث المطلوب وبالحرف قَ لقاعدته المعلومة وبالحرف س لارتفاعه المطلوب ثم يقال حيث ان كل مثلث مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى نصف ارتفاعه يكون

$$م = ق \times \frac{1}{2} ع \quad و \quad مَ = قَ \times \frac{1}{2} س$$

وحيث كان المطلوب ان يكون م = مَ يلزم ان يكون

$$ق \times \frac{1}{2} ع = قَ \times \frac{1}{2} س$$

وهذه المتساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

$$قَ : ق :: \frac{1}{2} ع : \frac{1}{2} س \quad أو$$

$$قَ : ق :: ع : س$$

فيعلم من هذه المتناسبة ان ارتفاع المثلث المطلوب هو الرابع المتناسب الهندسى للخطوط الثلاثة المعلومة التى هى قَ و ق و ع

(الدعوى الثالثة العملية شكل ١٢٧ الثانى)

اذا علم خطان مستقيمان مثل م و ن وكان المطلوب ايجاد الثالث المتناسب معهما اى ايجاد خط مستقيم مثل س يكون هو الطرف الثانى من متناسبة هندسية حدها الاول مبين بالخط م ووسطاها متساويان وكلاهما مبين بالخط ن فلذلك طرق

(الطريقة الاولى)

ان يرسم مستقيم غير محدود مثل اس ويؤخذ اب = م ويرسم على هذا المستقيم نصف محيط دائرة ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر الخط ن ويركز فى النقطة ا ويرسم قوس دائرة يقطع نصف المحيط فى نقطة مثل ح ثم ينزل من النقطة ح العمود حد على اب فيكون المستقيم

فيعلم من هذه المتناسبة ان ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع المتناسب الهندسي للخطوط الثلاثه المعلومة التي هي $\bar{ق}$ و $ق$ و $\frac{١}{٢}$ ع

(المثال الثالث)

ان يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم يكافئ شبه منحرف معروض فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف م لمساحته شبه المنحرف المعروض وبالحرف ص لقاعدته الصغرى وبالحرف ك لقاعدته الكبرى وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف $\bar{م}$ لمساحة المستطيل المطلوب وبالحرف $\bar{ق}$ للخط المعلوم الذي يعرض قاعدة له وبالحرف س لارتفاعه المطلوب ثم يقال حيث ان كل شبه منحرف مساحته تساوي حاصل ضرب نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين في ارتفاعه وكل مستطيل مساحته تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه يكون

$$م = \frac{١}{٢} (ص + ك) \times ع \quad و$$

$$\bar{م} = \bar{ق} \times س$$

وحيث كان المطلوب ان يكون م $=$ $\bar{م}$ يلزم ان يكون

$$\frac{١}{٢} (ص + ك) \times ع = \bar{ق} \times س$$

وهذه المتساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

$$\bar{ق} : \frac{١}{٢} (ص + ك) :: ع : س$$

فيعلم من هذه المتناسبة ان ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع المتناسب الهندسي للخطوط الثلاثة المعلومة التي هي

$$\bar{ق} \text{ و } \frac{١}{٢} (ص + ك) \text{ و } ع$$

(المثال الرابع)

ان يكون المطلوب انشاء مثلث على قاعدة معلومة يكافئ مثلثا مفروضا فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف م لمساحة المثلث المعلوم وبالحرف ق

لقاعدته

(الاول)

ان يكون المطلوب انشاء مستطيل على قاعدة معلومة يكافئ مربعا معلوما فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف م لضلع المربع المعلوم وبالحرف ن لقاعدة المستطيل المطلوب وبالحرف س لارتفاعه ثم يقال حيث ان كل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه وكل مربع مساحته تساوى تربيع احد اضلاعه يكون

$$م^٢ = ن \times س \quad أو \quad م \times م = ن \times س$$

ومن هذه المعادلة ينتج ان

$$ن : م :: م : س$$

ويعلم من هذه المتناسبة ان الارتفاع المطلوب هو الثالث المتناسب مع الخطين ن و م

(المثال الثانى)

ان يكون المطلوب تحويل مربع الى مثلث ارتفاعه معين فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف م لضلع المربع المعلوم وبالحرف ع لارتفاع المثلث المطلوب وبالحرف س لقاعدته المطلوبة ثم يقال حيث ان كل مثلث مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى نصف ارتفاعه وكل مربع مساحته تساوى حاصل ضرب ضلعه فى نفسه يكون

$$م^٢ = \frac{ع}{٢} \times س \quad أو \quad م \times م = \frac{ع}{٢} \times س$$

ومن هذه المتساوية ينتج أن

$$\frac{ع}{٢} : م :: م : س$$

فيعلم من هذه المتناسبة ان قاعدة المثلث المطلوب هى الثالث المتناسب مع نصف ارتفاعه وضلع المربع المعلوم

(الدعوى الرابعة العملية)

(شكل ١٤٠ الاول والثانى والثالث و ١٣٢)

ا ء هو الثالث المتناسب المطلوب

لانه قد تقرر فى نتيجة الطريقة الثالثة والعشرين ان الوتر اح وسط متناسب بين القطر اب والقسم المجاور له وهو ا ء اى ان

اب : اح :: اح : اء

وحيث كان اب = م و اح = ن يكون

م : ن :: ن : اء

والمطلوب ان يكون

م : ن :: ن : س فاذن يكون س = اء

وهو المطلوب

(الطريقة الثانية شكل ١٢٧ الثالث)

ان يرسم مستقيم غير محدود مثل اس وتعين عليه نقطة مثل ا ويقام منها العمود اب على اس ويؤخذ اب = ن ثم يؤخذ على يسار النقطة ا بعد مثل اح = م ويوصل حب ثم يقام من النقطة ب العمود بء على بح فيكون اء هو الخط المطلوب لانه قد تقرر فى الطريقة الثالثة والعشرين ان العمود المنزل من رأس الزاوية القائمة على وترها وسط متناسب بين قسمى الوتر المذكور اى ان

حا : اب :: اب : اء

وحيث كان حا = م و اب = ن يكون

م : ن :: ن : اء .

والمطلوب ان يكون

م : ن :: ن : س فاذن يكون س = اء وهو المطلوب

(الطريقة الثالثة)

ان يكرر احد الخطين المعلومين ثم يحث عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة المعلومة باحدى الطرق المشروحة فى الدعوى الثانية العملية

(مثالان)

(الاول)

ريقة الثالثة شكل ١٤٠ الثالث) *
حدود ويؤخذ منه اأ بعد أب بقدر اكبر المستقيمين
محيط دائرة قطره أب ثم يؤخذ بعد أح بقدر
لومين ويقام من النقطة ح عمود حه على أب
ن الوتر اه هو الوسط المتناسب المطلوب لانه قد تقرر
اثة والعشرين ان
د :. اه : اح
= ب و اح = ا يكون
:. اه : ا

:: ب : ا
= اه وهو المطلوب
الطريقة الرابعة شكل ١٣٢) *
هح يساوى اكبر المستقيمين المعلومين ويؤخذ منه
اصغر المستقيمين المذكورين ثم يمر محيط دائرة
حه ويرسم من النقطة ه مستقيم مماس ها
اسب المطلوب
ة الثانية والثلاثين أن
: ها : ها • هد
= ب و هد = ا يكون
ها :. ها : ا والمطلوب ان يكون
ب :: ب : ا
= ها وهو المطلوب
*(امثلة) *
ون المطلوب تحويل مستطيل الى مربع يكافيه فطريقة

اذا علم مستقيمان مثل ا و ب وكان المطلوب ايجاد مستقيم مثل س يكون وسطا متناسبا بينهما فلذلك طرق

(الطريقة الاولى)

ان يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ عليه البعد ده = ا والبعد هو = ب ثم يرسم نصف محيط قطره دو ويقام من النقطة ه العمود هر على القطر دو فيكون العمود هر هو الوسط المتناسب المطلوب لانه قد تقرر فى النظرية الثالثة والعشرين ان

ده : هر :: هر : هو

وحيث كان ده = ا و هو = ب يكون

ا : هر :: هر : ب

والمطلوب ان يكون

ا : س :: س : ب

فاذن يكون س = هر وهو المطلوب

(الطريقة الثانية شكل ١٤٠ الثانى)

ان يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه البعد اب = اكبر المستقيمين المعلومين ثم يؤخذ اح = المستقيم الآخر ويرسم نصف محيط قطره حب ثم يمد من النقطة ا مستقيم مماس له فيكون البعد المحصور بين نقطة التماس و النقطة ا هو الوسط المتناسب المطلوب لانه قد تقرر فى النظرية السابعة والثلاثين ان

اب : اه :: اه : اح

وحيث كان اب = ب و اح = ا يكون

ب : اه :: اه : ا

والمطلوب ان يكون

ب : س :: س : ا

فاذن يكون س = اه وهو المطلوب

الطريقة

$$\text{س} = \frac{\text{ب} \times \text{ح}}{\text{ا}} \quad \cdots\cdots \quad (١)$$

ومن المتناسبة الثانية ان

$$\text{س} = \frac{\text{د}^2}{\text{م}} \quad \cdots\cdots \quad (٢)$$

ومن الثالثة ان

$$\text{س}^2 = \text{ا} \times \text{ب} \quad \text{أو} \quad \text{س} = \sqrt{\text{ا} \times \text{ب}} \quad \cdots \quad (٣)$$

فالمتساوية (١) تدل على الحد الرابع من متناسبة هندسية طرفها الاول ا ووسطاها ب و ح

والمتساوية (٢) تدل على الحد الرابع من متناسبة هندسية طرفها الاول م ووسطاها متساويان وكلاهما يساوى د او على الثالث المتناسب مع المقدارين م و د

والمتساوية (٣) تدل على الوسط المتناسب الهندسى بين المقدارين ا و ب

واذا رمز بالحرف م لاحد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة فى المثلث القائم الزاوية وبالحرف د لضلعها الآخر وبالحرف س لوترها حدث

$$\text{س}^2 = \text{م}^2 + \text{د}^2 \quad \text{أو} \quad \text{س} = \sqrt{\text{م}^2 + \text{د}^2}$$

فهذه المعادلة تدل على وتر مثلث قائم الزاوية احد ضلعيه المحيطين بالقائمة مبين بالحرف م وضلعه الآخر مبين بالحرف د

ولو رمز بالحرف م لوتر القائمة وبالحرف د لاحد الضلعين المحيطين بها وبالحرف س لضلعها الآخر لحدث

$$\text{م}^2 = \text{د}^2 + \text{س}^2 \quad \text{أو} \quad \text{س}^2 = \text{م}^2 - \text{د}^2$$

$$\text{أو} \quad \text{س} = \sqrt{\text{م}^2 - \text{د}^2}$$

فهذه المتساوية تدل على احد ضلعى مثلث قائم الزاوية وتره م وضلعه الآخر د

ذلك ان يرمز بالحرف ن لقاعدة المستطيل المعلوم وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف س لضلع المربع المطلوب
ثم يقال حيث ان كل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه وكل مربع مساحته تساوى حاصل ضرب ضلعه فى نفسه يكون

ن × ع = س٢ أو ن × ع = س × س

ومن هذه المتساوية ينتج أن

ن : س :: س : ع

فيعلم من هذه المتناسبة ان ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين قاعدة المستطيل المعلوم وارتفاعه

المثال الثانى ان يكون المطلوب تحويل مثلث معلوم الى مربع وطريقة ذلك ان يبحث عن الوسط المتناسب الهندسى بين قاعدة المثلث ونصف ارتفاعه

المثال الثالث ان يكون المطلوب تحويل متوازى الاضلاع الى مربع يكافيه وطريقة ذلك ان يبحث عن الوسط المتناسب الهندسى بين قاعدة المتوازى الاضلاع وارتفاعه

المثال الرابع ان يكون المطلوب تحويل شبه منحرف الى مربع يكافيه فطريقة ذلك ان يبحث عن الوسط المتناسب الهندسى بين نصف مجموع قاعدتى شبه المنحرف وارتفاعه

(تنبيه عمومى يتعلق بالخطوط المتناسبة)

قد تقرر فى الدعوى الثانية العملية أن

ا : ب :: ح : س

وفى الدعوى الثالثة العملية ان

م : د :: د : س

وفى الدعوى الرابعة العملية ان

ا : س :: س : ب

فينتج من المتناسبة الاولى ان

س = $\sqrt{٣}$ = $\sqrt{٣ \times ١}$

فيكون س هو الوسط المتناسب الهندسي بين مستقيمين احدهما يساوي ٣ والآخر يساوي ١

وبالجملة اذا رمز بالحرف م لعدد صحيح مركب من مضروبين احدهما ن والآخر ص كان $\sqrt{م}$ أو $\sqrt{ن \times ص}$ هو الوسط المتناسب الهندسي بين ن و ص

و $\sqrt{م}$ أو $\sqrt{م \times ١}$ يدل في جميع الحالات على الوسط المتناسب الهندسي بين م والواحد

وقد ذكرنا طرقا لرسم كل من الرابع المتناسب والثالث المتناسب والوسط المتناسب وذكرنا ايضا طريقة لرسم المثلث القائم الزاوية الذي علم منه ما يكفي لرسمه

واعلم ان المعادلات التي ذكرناها في هذا التنبيه مفيدة جدا اذ هي الارتباطات الاصلية المستعملة في الهندسة وفي تطبيق الجبر على الهندسة

(الدعوى الخامسة العملية)

(شكل ١٤٢ الثاني)

اذا علمت نقطة مثل ج بين ضلعي زاوية مثل ب ا ص وكان المطلوب ان يمد من هذه النقطة مستقيم مثل د ج هـ نسبة جزئه د ج لجزئه الآخر ج هـ كنسبة م : ن

فطريقة ذلك ان يمد من النقطة المعلومة ج مستقيم مثل ج ب يوازي ا ب الذي هو احد ضلعي الزاوية ثم يبحث عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة وهي م و ن و ا ب ثم يؤخذ ب هـ بقدر الرابع المتناسب المذكور ويوصل المستقيم هـ ج د فيكون هـ ج د هو المستقيم المطلوب لانه يلزم من كون الخط ج ب موازيا للخط ا د ان يكون

ج د : ج هـ :: ا ب : ب هـ

وحيث أن ا ب : ب هـ :: م : ن يكون

وقد تقرر فى النتيجة الثانية من النظرية العاشرة ان نسبة قطر المربع لضلعه كنسبة جذر الاثنين للواحد فبنى على هذا ان المربع الذى قطره يساوى ٢ يكون ضلعه مساويا $\sqrt{٢}$ وحينئذ المعادلة التى بهذه الصورة

س $= \sqrt{٢}$ تدل على ضلع المربع الذى قطره يساوى ٢ ولرسمه توضع المعادلة المذكورة بهذه الصورة س $= \sqrt{٢ \times ١}$ ثم يبحث عن الوسط المتناسب الهندسى بين ٢ و ١ فيكون هو ضلع المربع المطلوب

واذا فرض معادلة بهذه الصورة

س $= \sqrt{٥}$ وكان المطلوب بيان ما تدل عليه هذه المعادلة فلتكتب هكذا

$$س = \sqrt{٥} = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٢^٢ + ١^٢}$$

فيكون س هو وتر مثلث قائم الزاوية احد ضلعيه المحيطين بالقائمة يساوى ١ وضلعه الآخر يساوى ٢

ولو فرض معادلة بهذه الصورة

س $= \sqrt{٦}$ وكان المطلوب بيان ما تدل عليه هذه المعادلة فلتوضع هكذا

$$س = \sqrt{٦} = \sqrt{٤ + ٢} = \sqrt{٢^٢ + (\sqrt{٢})^٢}$$

فيكون س هو وتر مثلث قائم الزاوية احد ضلعيه المحيطين بالقائمة يساوى ٢ وضلعه الآخر يساوى $\sqrt{٢}$

أو توضع هكذا

$$س = \sqrt{٦} = \sqrt{٣ \times ٢}$$

فيكون س هو الوسط المتناسب الهندسى بين مستقيمين احدهما يساوى ٣ والآخر يساوى ٢

واذا فرض معادلة بهذه الصورة

س $= \sqrt{٣}$ وكان المطلوب بيان ما تدل عليه هذه المعادلة فلتكتب هكذا

س

فتعين النقطة ل ويكون المستقيم لح هو المستقيم المطلوب
لانه يلزم من كون

رل : لك :: هح : حف

ان تتقاطع الخطوط الثلاثة ره و لح و كف فى نقطة واحدة
كما هو واضح مما تقرر فى النظرية الثانية والعشرين

(الحالة الثانيه)

ان يمد من النقطة المعلومة حَ مستقيم كيف اتفق مثل هحَفَ ثم تؤخذ
نقطة مثل ر على المستقيم اب ويمد منها مستقيم مثل ركَ يوازى
هحَفَ ثم يقسم رك الى جزئين احدهما رل والآخر لك بحيث
يكون

رل : لك :: هح : حف

ثم يبحث عن النقطة لَ التى هى النقطة الاقترانية للنقطة ل اى
المقارنة لها فى الخط ركَ فيكون المستقيم لَحَ هو المستقيم المطلوب
لانه يلزم من كون النقطتين ح و حَ متوافقتى الاقتران ان يكون

هحَ : فحَ :: هح : حف

وكذا يلزم من كون النقطتين ل و لَ متوافقتى الاقتران ان يكون

رلَ . كلَ :: رل : لك

وقد سبق بالعمل أن رل : لك : هح : حف

فاذن يكون رلَ : كلَ :: هحَ . فحَ أو
رلَ ـــ كلَ : كلَ :: هحَ ـــ فحَ . فحَ أى
رك : كلَ :: هف : فحَ

ح ى : ح هـ :: م : ق

وهو المطلوب

(تنبيه)

حين تكون النقطة المعلومة ح على الخط المنصف للزاوية المعلومة ب ا ﺻ يكون للمسئلة حلان وحين تكون الكمية م مساوية للكمية ق تنحصر العملية بان يؤخذ ب هـ بقدر ا ب ثم يوصل هـ ح ى فيكون ح ى = ح هـ وبهذه الكيفية تحل مسئلة هى ان يكون المعلوم نقطة مثل ا بين ضلعى زاوية مثل ى ح ب كما فى الشكل ١٤٢ من اللوحة ٥ ويكون المطلوب ان يمد من هذه النقطة مستقيم جزآه ا ى و ا ب الكائنان بين النقطة المعلومة ا وضلعى الزاوية متساويان

(الدعوى السادسة العملية)

(شكل ٢٨٨)

اذا علم مستقيمان مثل ا ب و ح ى ممكنا التقاطع لكن نقطة تقاطعهما خارجة عن لوحة الرسم وكان المطلوب ان يمد مستقيم ثالث مثل ح ك أو ح ك َ يمر بنقطة تقاطع الخطين المعلومين ا ب و ح ى وبنقطة مثل ح أو ح َ معينة الوضع بين ضلعى زاوية الخطين ا ب و ح ى أو خارجها فطريقة عمل ذلك حالتان

(الحالة الاولى)

ان يمد من النقطة المعلومة ح مستقيم كيف اتفق مثل هـ ح ف ثم تؤخذ نقطة مثل ر على المستقيم ا ب ويمد منها مستقيم مثل ر ك يوازى هـ ف ويقسم ر ك الى جزئين احدهما ر ل والآخر ل ك بحيث يكون

ر ل : ل ك :: هـ ح : ح ف.

فتتعين

المناسب المذكور ثم ينشا على طـ مربع يكون هو المربع المطلوب اى المكافىء للشكل المتوازى الاضلاع ا ـ ى لانه يلزم من كون طـ وسطا متناسبا بين القاعدة ا ـ والارتفاع ى هـ ان يكون

ا ـ : طـ :: طـ . ى هـ

فاذن يكون

طـ‾٢ = ا ـ × ى هـ

وحيث ان ا ـ × ى هـ يساوى مساحة متوازى الاضلاع ا ـ ى يكون المربع المنشا على طـ مكافئا لمتوازى الاضلاع المعلوم وهو المطلوب

وثانيا ليكن ا ـ ح هو المثلث المفروض و ـ ح قاعدته و ا ى ارتفاعه فيبحث عن الوسط المتناسب بين القاعدة ـ ح ونصف الارتفاع ا ى وليكن طـ هو الوسط المذكور ثم ينشا على طـ مربع يكون هو المربع المطلوب اى المكافىء للمثلث ا ـ ح

لانه يلزم من كون طـ وسطا متناسبا بين القاعدة ـ ح ونصف الارتفاع ا ى ان يكون

ـ ح : طـ :: طـ : ½ ا ى

فاذن يكون

طـ‾٢ = ـ ح × ½ ا ى

وحيث ان ـ ح × ½ ا ى يساوى مساحة المثلث ا ـ ح يكون المربع المنشا على طـ مكافئا للمثلث ا ـ ح وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم انه قد سبق حل هاتين المسئلتين بطريقة حسابية فى الامثلة المشروحة فى الدعوى الرابعة العملية

(الدعوى الثامنة العملية)

ويلزم من هذا ان تقاطع الخطوط الثلاثة ره و كف و لج
فى نقطة واحدة

(تنبيه)

اعلم انه يمكن تعيين النقطة ل مباشرة بدون احتياج للنقطة ل المتوافقة
الاقتران مع النقطة ل

وذلك بان يمد من النقطة المعلومة ح مستقيم مثل ح ف ه ثم تؤخذ
نقطة مثل ر على المستقيم اب ويمد منها مستقيم مثل رك يوازى
ه ح ثم يبحث عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة ه ف و رك
و ف ح ويوجد كل بقدر الرابع المتناسب المذكور فتتعين النقطة
ل والمستقيم الذى يمر بها وبالنقطة المعلومة ح يمر بتقاطع الخطين
المعلومين اب و ده
لانه يلزم من كون

ه ف : رك :: ف ح : كل

ان تقاطع الخطوط الثلاثة ره و كف و لح فى نقطة واحدة

(الدعوى السابعة العملية)

(شكل ١٤٣ و ١٤٤ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء مربع يكافئ شكلا متوازى الاضلاع معلوما او مثلثا
معروفا فطريقة ذلك ان يقال
اولا ليكن ابجد شكلا متوازى الاضلاع و اب قاعدته و ده
ارتفاعه فيبحث عن الوسط المتناسب بين القاعدة اب والارتفاع ده
باحدى الطرق المقررة فى الدعوى الرابعة العملية وليكن ط ى هو الوسط

المتناسب

ستة اذرع وهو مقدار ضلع المربع المطلوب

(المثال الثانى)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المكافىء لمثلث قاعدته اثنا عشر ذراعا وارتفاعه ستة اذرع فطريقة ذلك ان يضرب مقدار القاعدة فى نصف مقدار الارتفاع ثم يوخذ جذر حاصل الضرب فيكون الناتج من الجذر هو مقدار ضلع المربع المطلوب

ففى هذا المثال يضرب اثنا عشر ذراعا فى ثلاثة اذرع فيكون حاصل الضرب ستة وثلاثين ذراعا مربعا وهو مقدار مساحة كل من المثلث المعلوم والمربع المطلوب فاذا اخذ جذر الستة والثلاثين كان ناتج الجذر ستة اذرع وهو مقدار ضلع المربع المطلوب

(المثال الثالث)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار ارتفاع المستطيل الذى مقدار قاعدته اثنى عشر ذراعا ليكون مكافئا لمستطيل معلوم مقدار قاعدته تسعة اذرع ومقدار ارتفاعه اربعة اذرع فطريقة ذلك ان يضرب مقدار قاعدة المستطيل المعلوم فى مقدار ارتفاعه ثم يقسم حاصل الضرب على مقدار القاعدة الاخرى التى يراد انشاء المستطيل عليها فيكون خارج القسمة هو مقدار الارتفاع المطلوب

ففى هذا المثال يضرب تسعة اذرع فى اربعة اذرع فيكون حاصل الضرب ستة وثلاثين ذراعا مربعا فاذا قسم هذا الحاصل على اثنى عشر ذراعا كان خارج القسمة ثلاثة اذرع وهو مقدار ارتفاع المستطيل المطلوب

(الدعوى التاسعة العملية)

(شكل ١٥٢ من اللوحة ٦)

اذا علم مربع مثل ح وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون مجموع ضلعيه المتجاورين مساويا لخط معلوم مثل اب فطريقة ذلك ان يرسم نصف محيط قطره اب ثم يرسم مستقيم مثل ده يوازى القطر اب

(شكل ١٤٥ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء مستطيل مثل ا د ه ط على مستقيم معلوم مثل ا د يكافىء مستطيلا معروضا مثل ا ب و ح فطريقة ذلك ان يبحث عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة المعلومة وهى ا د و ا ب و ا ح وليكن ا ط هو الرابع المتناسب المذكور ثم ينشأ مستطيل احد ضلعيه المجاورين ا د والآخر ا ط فيكون هو المستطيل المطلوب اى المكافىء للمستطيل المعروض ا ب و ح

لانه يلزم من كون ا ط رابعا متناسبا مع الخطوط الثلاثة ا د و ا ب و ا ح ان يكون

ا د : ا ب :: ا ح : ا ط

فاذن يكون

ا د × ا ط = ا ب × ا ح

اى ان المستطيل ا د ه ط مكافىء للمستطيل ا ب و ح وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم انه قد سبق حل هذه المسئلة بطريقة حسابية فى الامثلة المقررة فى الدعوى الثانية العملية

(امثلة)

(المثال الاول)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المكافى لشكل متوازى الاضلاع قاعدته تسعة اذرع وارتفاعه اربعة اذرع فطريقة ذلك ان يضرب مقدار القاعدة فى مقدار الارتفاع فجذر حاصل الضرب هو مقدار ضلع المربع المطلوب

ففى هذا المثال يضرب تسعة اذرع فى اربعة اذرع فيكون الحاصل من الضرب ستة وثلاثين ذراعا مربعا وهو مقدار مساحة كل من المستطيل المعلوم والمربع المطلوب فاذا اخذ جذر الستة والثلاثين كان ناتج الجذر

ستة

وبمقتضى القواعد المقررة فى الدرجة الثانية من علم الجبر يكون

$$س = \frac{١٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{١٣^{٢}}{٤} - ٣٦}$$ أو

$$س = \frac{١٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{١٣^{٢}}{٤} - \frac{٤ \times ٣٦}{٤}}$$ أو

$$س = \frac{١٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{١٦٩ - ١٤٤}{٤}}$$ أو

$$س = \frac{١٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \frac{١٣}{٢} \pm \frac{٥}{٢}$$

فاذا اضيف الكسر الثانى الذى هو $\frac{٥}{٢}$ الى الكسر الاول الذى هو $\frac{١٣}{٢}$
كان الناتج مساويا لاحد بعدى المستطيل المطلوب انشاؤه واذا طرح
الكسر الثانى من الكسر الاول كان الباقى مساويا لبعده الآخر فاذن
يكون احد بعدى المستطيل $\frac{١٣ + ٥}{٢} = \frac{١٨}{٢} = ٩$ والعدد الآخر
$\frac{١٣ - ٥}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$ وذلك لان $٩ \times ٤ = ٣٦$ و $٩ + ٤ = ١٣$ و $١٣ \times ٢ = ٢٦$.
وحيث ان هذا المستطيل مشتمل على شروط المسئلة فهو المطلوب

(المثال الثانى)

ان يكون المطلوب انشاء مستطيل يكافىء مربعا مساحته تسعة واربعون
ذراعا مربعا بحيث يكون مجموع الضلعين المتجاورين من ذلك المستطيل
مساويا لاربعة عشر ذراعا فطريقة ذلك ان يقال حيث ان ضلع المربع المعلوم
سبعة اذرع ونصف مجموع الضلعين المتجاورين من المستطيل سبعة اذرع
كذلك يعلم من ذلك ان حل هذه المسئلة ممكن وحينئذ لمعرفة كل من الضلعين
المتجاورين من المستطيل المطلوب يجرى العمل كما فى المثال الاول

(المثال الثالث)

ان يكون المطلوب انشاء مستطيل يكافىء مربعا مساحته اربع وستون
ذراعا مربعا ويكون مجموع الضلعين المتجاورين من ذلك المستطيل اربعة عشر
ذراعا فطريقة ذلك ان يقال حيث ان ضلع المربع المعلوم ثمانية اذرع ونصف
مجموع الضلعين المتجاورين من المستطيل سبعة اذرع يعلم من ذلك ان حل هذه

شيطًا ان يكون البعد بينهما مساويا للخط اى المساوى لضلع المربع المعلوم ح ثم ينزل على القطر اب عمود مثل هو من النقطة ه التى هى تقاطع الخط ده بالمحيط وهذا العمود يقسم القطر اب الى قسمين هما او و وب والمستطيل المكون منهما هو المستطيل المطلوب لان مجموعهما يساوى اب ومستطيلهما او × وب يساوى مربع العمود هو كما تقرر ذلك فى نتيجة النظرية الثالثة والعشرين وحيث ان العمود هو يساوى العمود اى و اى يساوى ضلع المربع المعلوم ح يكون هذا المستطيل مكافئا للمربع المعلوم ح وهو المطلوب

(تنبيه)

يلزم لامكان حل هذه المسئلة ان لا يزيد البعد اى عن نصف القطر اعنى ان لا يزيد ضلع المربع المعلوم ح عن نصف الخط المعلوم اب

(امثلة)

(المثال الاول)

اذا علم مربع مساحته ستة وثلاثون ذراعا مربعا وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون محيطه ستة وعشرين ذراعا فطريقة ذلك ان نصف المحيط فيكون الناتج ثلاثة عشر ذراعا وهو مقدار مجموع الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب

وحيث ان ضلع المربع المعلوم اقل من نصف هذا المجموع يعلم من ذلك ان حل هذه المسئلة ممكن وحينئذ لمعرفة كل من الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب يرمز بالحرف س لاحدهما فيكون الآخر مساويا للكمية ١٣ — س فاذن يكون

$$س(١٣ - س) = ٣٦ \quad \text{او}$$

$$١٣س - س^٢ = ٣٦ \quad \text{او}$$

$$س^٢ - ١٣س = -٣٦.$$

$س = -\frac{٩}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩^{٢}}{٤} + \frac{٣٦ \times ٤}{٤}} = -\frac{٩}{٢} \pm \sqrt{\frac{٢٢٥}{٤}}$ أو

$سَ = -\frac{٩}{٢} \pm \frac{١٥}{٢} = +٣$ أو $س = -١٢$

وحيث أن المقدار الثانى سالب لا يؤخذ الا الاول وحينئذ يكون اصغر الضلعين ثلاثة اذرع واكبرهما ٩ + ٣ = ١٢ ذراعا وحيث أن ٣ × ١٢ = ٣٦ و ١٢ − ٣ = ٩ يكون هذا المستطيل هو المستطيل المطلوب لانه قد اشتمل على شروط المسئله تمامها

(تنبيهان)

الاول اعلم ان حل هذه الدعوى ممكن دائما

الثانى اذا كان المطلوب انشاء مستطيل يكافى مربعا معلوما كان للمسئلة حلول لا حصر لعددها يعنى ان المسئله التى بهذا المنطوق سيالة لا ينحصر حلها فى مستطيل واحد

وذلك ان مربع الخط المماس اد يكافى المستطيل الحادث من ضرب اى خط قاطع مثل دو فى جزئه الخارج ده اى ان

$\overline{اد}^{٢} = دو \times ده = دوَ \times دهَ = دوً \times دهً$ الخ

و وَ و هَ و وً و هً رموز لنقط التقاطع بفرض ان الخطوط دوَ و دوً الخ مرسومة .

(الدعوى الحادية عشر العملية)

(شكل ١٤١ من اللوحة ٥)

اذا كان المطلوب تقسيم مستقيم محدود مثل اب الى قسمين اكبرهما وسط متناسب بين الخط الكلى والجزء الآخر فلذلك جملة حلول

(الحل الاول)

لتكن النقطة و هى نقطة التقسيم و او هو القسم الاكبر المطلوب فعلى منطوق المسئلة يلزم ان يكون

المسئلة غير ممكن

(الدعوى العاشرة العملية)

(شكل ١٥٣ من اللوحة ٦)

اذا علم مربع مثل ح وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون فاصل ضلعيه المتجاورين مساويا لخط معلوم مثل اب فطريقة ذلك ان يرسم محيط قطره الخط المعلوم اب ثم يقام على طرف هذا القطر عمود مثل اى ويؤخذ اى بقدر ضلع المربع المعلوم ح ثم يوصل مستقيم بين النقطة ى والمركز ح فالمستقيمان ىو و ىه يكونان الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب لان فاصلهما يساوى القطر هو أو القطر اب وحاصل ضربهما وهو ىه × ىو يساوى مربع اى كما تقرر ذلك فى نتيجة المطلوبة الثانية والثلاثين وحيث كان مربع اى يساوى المربع المعلوم ح يلزم ان يكون هذا المستطيل مكافئا للمربع المعلوم ح وهو المطلوب

(مثال)

اذا علم مربع مساحته ستة وثلاثون ذراعا مربعا مثلا وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون فاصل ضلعيه المتجاورين تسعة ادرع فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف س لاصغر الضلعين المتجاورين فيكون الضلع الآخر ٩ + س وتكون مساحة المستطيل (٩ + س) × س وحيث كان المطلوب ان يكون المستطيل مكافئا للمربع المعلوم وكانت مساحة المربع المعلوم ستة وثلاثين ذراعا مربعا يلزم ان يكون

$(٩ + س) \times س = ٣٦$ أو

$٩ س + س^{٢} = ٣٦$ أو

$س^{٢} + ٩ س = ٣٦$ ومن هذه المعادلة ينتج أن

$س = -\frac{٩}{٢} \pm \sqrt{\frac{٨١}{٤} + ٣٦}$ أو

$$أد = \sqrt{\overline{اب}^2 + \overline{بد}^2}$$

فاذا رمز بالحرف ب للخط اب يكون

$$أد = \sqrt{ب^2 + \frac{ب^2}{4}} = \sqrt{\frac{5ب^2}{4}} = \frac{ب}{2}\sqrt{5}$$

و دى $= \frac{ب}{2}$ فاذن يكون

$$او = \frac{ب}{2}\sqrt{5} - \frac{ب}{2} = \frac{ب}{2} \times (\sqrt{5} - 1)$$

(الحل الثانى)

ليكن س هو القسم الاكبر المطلوب فعلى منطوق المسئلة يلزم ان يكون

$$اب : س :: س : اب - س$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$س^2 = اب \times (اب - س) = \overline{اب}^2 - س \times اب$$

$$\text{أو } س^2 + س \times اب = \overline{اب}^2$$

وبمقتضى القواعد المقررة فى الدرجة الثانية من علم الجبر يكون

$$س = -\frac{اب}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{اب}{2}\right)^2 + \overline{اب}^2} \text{ اى .}$$

$$س = \pm \sqrt{\left(\frac{اب}{2}\right)^2 + \overline{اب}^2} - \frac{اب}{2}$$

$$\text{أو } س = + \sqrt{\left(\frac{اب}{2}\right)^2 + \overline{اب}^2} - \frac{اب}{2} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{و } سَ = - \sqrt{\left(\frac{اب}{2}\right)^2 + \overline{اب}^2} - \frac{اب}{2} \quad \ldots\ldots (2)$$

وحيث ان مقدار سَ سالب ومقداره المطلق اكبر من الخط اب يعلم

اب : او :: او : وب

وقد تقرر في علم الحساب ان نسبة مجموع الحدين الاولين الى الحد الاول كنسبة مجموع الحدين الاخيرين الى الحد الثالث فاذن يكون

اب + او . اب :: او + وب : او

وحيث ان او + وب = اب يكون

اب + او : اب :: اب : او

ومن هذه المناسبة ينتج أن

(اب + او) × او = $\overline{\text{اب}}^2$

فالمجهول في هذه المعادلة هو او و اب + او

ويعلم من هذه المعادلة ان الخطين المجهولين هما ضلعا مستطيل فاضل ضلعيه يساوي الخط المعلوم اب ومساحته تساوي $\overline{\text{اب}}^2$ فاذن يمكن ايجاد ذلك المستطيل بما ذكر في العملية السابقة في ذلك تنتج طريقة رسمية هي ان يقام العمود بح على اب من النهاية ب ويؤخذ بح مساويا لنصف الخط اب ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر بح ويرسم محيط دائرة مركزه النقطة ح ثم يوصل المستقيم احه فيكون احد الخطين المطلوبين = اه والآخر = اد لان فاصلهما ده = ٢بح = اب ومستطيلهما وهو اه × اد = $\overline{\text{اب}}^2$

فاذن يكون اب + او = اه ويكون او = اد فاذا جعلت النقطة ا مركزا ورسم قوس دائرة نصف قطره يساوي اد كانت نقطة تقاطع هذا القوس بالخط المعلوم اب هي نقطة التقسيم المطلوبة فاذن يكون او هو القسم الاكبر المطلوب

(تنبيه)

قد تبين أن

او = اد = اح — حد = اح — حب وأن

اح

يكون

اهـ ـــ اب : اب :: اب ـــ اد : اد

ويلزم من كون نصف القطر ح مساويا لنصف الخط اب ان يكون
ده مساويا للخط اب ويلزم من هذا ان يكون

اهـ ـــ اب = اد = او و
اب ـــ اد = اب ـــ او = بو

فاذن يكون

او : اب :: بو : او

وبتغيير موضع الوسطين يكون

اب : او :: او : بو

وهو المطلوب

(تنبيه)

*اعلم ان الخط اهـ ينقسم فى النقطة د كما ينقسم الخط اب فى النقطة
و اعنى ان

اهـ : ده :: ده : اد

لانه قد تقرر ان

اهـ : اب :: اب : اد وأن اب = ده

فاذن يكون

اهـ : ده :: ده : اد

ثم ان هذا التقسيم يسمى نسبة الوسط والطرفين يعنى ان الخط المقسوم بطريق
نسبة الوسط والطرفين هو ما كانت نسبته لجزئه الاكبر كنسبة جزئه الاكبر
لجزئه الاصغر وبعبارة اخرى هو ما كان مربع جزئه الاكبر مكافئا للمستطيل
المكوّن من ذلك الخط وجزئه الاصغر وسياتى استعمال هذا التقسيم

(الدعوى الثانية عشر العملية)

(شكل ٢٨٩)

من ذلك ان المقدار الاول الذى هو س = + $\sqrt{\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} + اب^{٢}}$ − $\frac{اب}{٢}$ هو الذى يوافق حل المسئلة وبالتأمل فى هذه المعادلة وملاحظة ما تقرر فى التشبيه العمومى المتعلق بالخطوط المتماسة نعلم ان القسم الاكبر المطلوب يتحصل بطرح نصف الخط المعلوم اب من وتر مثلث قائم الزاوية احد ضلعى زاويته القائمة يساوى الخط المعلوم اب وضلعها الآخر يساوى نصفه ومن هنا تنتج طريقة رسمية

هى ان يقام العمود ب ح على اب من نهايته ب ويؤخذ ب ح = $\frac{اب}{٢}$ ويوصل اح ثم يطرح ح ب من ح ا اى يؤخذ ح ى = ح ب فيكون ا ى مساويا للقسم الاكبر المطلوب فاذا اخذ او = ا ى يقسم الخط المعلوم اب كما هو المطلوب ويكون

اب : او :: او : وب

(الحل الثالث)

ان يقام العمود ب ح على اب من نهايته ب ويؤخذ ب ح مساويا لنصف الخط اب ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر ب ح ويرسم محيط دائرة مركزه النقطة ح ثم يوصل المستقيم اح فيقطع محيط الدائرة فى النقطة ى ثم يؤخذ او مساويا للبعد ا ى فينقسم الخط اب فى النقطة و الى القسمين المطلوبين ويكون

اب : او :: او : وب

لانه يلزم من كون الخط اب عمودا ممتدا من نهاية نصف القطر ب ح ان يكون مماسا للمحيط ولو مد الخط اح على استقامته جهة ح حتى قطع المحيط فى النقطة هـ لحدث

اهـ : اب :: اب : ا ى

كما تقرر ذلك فى النظرية الثانية والثلاثين وقد تقرر فى علم الحساب ان نسبة المقدم ناقصا تاليه الى تاليه كنسبة المقدم الثانى ناقصا تاليه الى تاليه فاذن

يكون

تتقاطع خط المركزين بالمستقيمين ك ل و كَ لَ النقطتين المطلوبتين

لانه يلزم من كون ح ك موازيا للخط حَ ل ان يكون

ح د : حَ د :: ح ك : حَ ل

وحيث ان ح ك = ح م و حَ ل = حَ ن يكون

ح د : حَ د :: ح م : حَ ن

وكذا يلزم من تساوى الزوايا المتناظرة من المثلثين ح دَ ك و حَ دَ ل ان يكون

ح دَ : حَ دَ :: ح م : حَ ن

فحينئذ اذا امتد من كلتا النقطتين د و دَ مماس للدائرة ح أو للدائرة حَ كان مماسا للاخرى

(مناقشات)

الاولى اذا كان البعد بين المركزين ح حَ اكبر من مجموع نصفي قطرى الدائرتين امكن ان يمد اربعة خطوط مستقيمة كل منها يمس الدائرتين لكن اثنان منها يمسانهما من الخارج بان تكون نقطة تلاقيهما بخط المركزين غير محصورة بين المركزين المذكورين والاثنان الآخران يمسانهما من الداخل بان تكون نقطة تلاقيهما بخط المركزين محصورة بين هذين المركزين

والثانية اذا كان البعد بين المركزين ح حَ مساويا لمجموع نصفي قطرى الدائرتين امكن ان يمد ثلاثة خطوط مستقيمة كل منها يمس الدائرتين لكن اثنان منها يمسانهما من الخارج والثالث يمسهما من الداخل

والثالثة اذا كان البعد بين المركزين ح حَ اصغر من مجموع نصفي قطرى الدائرتين واكبر من فاصلهما امكن ان يمد خطان مستقيمان كلاهما يمس

اذا كان المطلوب رسم مستقيم يمس دائرتين فطريقة ذلك ان يقال ليكن م د
مستقيما مماسا للدائرتين من الخارج و س سَ مماسا لهما من الداخل
ولتكن ه نقطة تقاطع م د بخط المركزين ح حَ و هَ نقطة تقاطع
س سَ بالخط ح حَ فيعلم من ذلك انه اذا علم موضع النقطتين ه و هَ
يكفي ان يمد من كل منهما مستقيم مماس لاحدى الدائرتين فيمس الاخرى
وحينئذ تحل المسئلة فاذا وصل نصفا القطرين ح م و حَ د يكون
المثلث ح م ه مشابها للمثلث حَ د ه ويلزم من تشابههما ان يكون

ح ه : حَ ه :: ح م : حَ د ... (١)

ولو وصل نصفا القطرين ح س و حَ سَ لكان المثلث ح س هَ مشابها
للمثلث حَ سَ هَ ويلزم من تشابههما ان يكون

ح هَ : حَ هَ :: ح س : حَ سَ

وحيث ان ح س = ح م و حَ سَ = حَ د يكون

ح هَ : حَ هَ :: ح م : حَ د ... (٢)

وحيث ان كلا من نصفي القطرين ح م و حَ د معلوم يعلم من ذلك ان
النقطتين ه و هَ نقطتان مقترنتان قاسمتان للبعد ح حَ الى قسمين
النسبة بينهما ثابتة ومساوية للنسبة المعلومة ح م : حَ د ومن هذا تنتج
طريقة رسمية هي ان يرسم في الدائرة ح قطر كيف اتفق مثل القطر
ك ح كَ ثم يمد من النقطة حَ نصف قطر مثل حَ ل يوازي ح ك ثم
يوصل ك ل و كَ ل فتكون النقطتان ه و هَ الحادثتان من

تقاطع

فالمستقيم المعلوم ل م
ولرسم هذا المحيط يمد من النقطة د عمود مثل د ر على ل م ثم يقام عمود مثل ے ک على وسط المستقيم ا ب فالنقطة ح التي هي تقاطع العمودين تكون مركز المحيط المطلوب ويكون ح د نصف قطره وبهذا تحل المسئلة

(تنبيه)

الوسط المتناسب الذي يحدث من هذه المتناسبة

هـ ب : س :: س : ها

يمكن رسمه في الشكل بعينه بسهولة وذلك ان يرسم على هـ ب نصف محيط دائرة ويقام من النقطة ا العمود اى فالوتر هـ ى يكون هو الوسط المتناسب المطلوب ويكفي بعد ذلك ان يؤخذ هـ د بقدر هـ ى

(مناقشات)

حل هذه المسئله ممكن دائما مادامت النقطتان ا و ب موضوعتين في جهة واحدة بالنسبة للخط ل م وفي هذه الحالة يمكن رسم دائرتين كلتاهما توافق حل المسئلة لكن احداهما تمس المستقيم المعلوم ل م في النقطة د والاخرى تمسه في النقطة دَ التي تبعد هاعن النقطة هـ بقدر الوسط المتناسب هـ ى

ولا يمكن حلها اذا كان المستقيم المعلوم واقعا بين النقطتين ا و ب وحين يكون المستقيم ا ب المار بالنقطتين المعلومتين ا و ب موازيا للمستقيم المعلوم ل م فلا يكون هناك وسط متناسب يمكن رسمه ففي هذه الحالة نقطة تماس المستقيم المعلوم ل م بالمحيط المطلوب توجد لا محالة في تقاطع المستقيم المعلوم ل م بالعمود المقام على وسط المستقيم ا ب ولا يوجد في هذه الحالة الا محيط واحد يوافق حل المسئلة

(الدعوى الرابعة عشر العملية)

(شكل ٢٩١)

الدائرتين من الخارج فقط

والرابعة اذا كان البعد بين المركزين ح ح مساويا للفاصل بين قطرى الدائرتين امكن ان يمد مستقيم يمسهما من الخارج فقط
والخامسة اذا كانت احدى الدائرتين داخل الاخرى لا يمكن ان يمد مستقيم يمسهما لا من الخارج ولا من الداخل لان المستقيم الذى يمس محيط الدائرة الصغرى يقطع محيط الكبرى كما هو واضح

(تنبيه)

اعلم ان حل هذه المسئلة بهذه الطريقة اسهل من حلها بالطريقة المعتادة المشروحة فى ملحقات المقالة الثانية

(الدعوى الثالثة عشر العملية)

(شكل ٢٩٠)

اذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين معلومتين مثل ا و ب ويمس مستقيما وضعه معين مثل ل م

طريقة ذلك ان يقال لتكن ح هى نقطة تماس المحيط المطلوب بالمستقيم المعلوم ولو وصل المستقيم ب ا ومد على استقامته جهة ا حتى قطع المستقيم المعلوم فى نقطة مثل هـ لزم ان يكون

هـ ب : هـ ح :: هـ ح : هـ ا

فيعلم من هذه المتناسبة ان البعد بين نقطة التماس ح ونقطة تقاطع المستقيم المعلوم بالمستقيم المار بالنقطتين المعلومتين وسط متناسب بين المستقيمين هـ ب و هـ ا ومن هنا تنتج طريقة رسمه

هى ان يوصل مستقيم بين النقطتين المعلومتين ويمد حتى يقطع المستقيم المعلوم فى نقطة مثل هـ ثم يبحث عن الوسط المتناسب بين المستقيمين هـ ب و هـ ا ثم يؤخذ من المستقيم المعلوم ل م البعد هـ ح أو هـ حَ بقدر الوسط المتناسب المذكور فتكون النقطة ح أو حَ نقطة تماس المحيط المطلوب

بالمستقيم

المعلومة ح في نقطتين مثل هـ و و ثم يوصل المستقيمان اـ و هو ويمدان حتى يلتقيا في نقطة مثل ى ثم يمد من النقطة ى مستقيم مثل ى م يمس محيط الدائرة المعلومة ح فالنقطة م تكون نقطة تماس المحيطين وحينئذ يسهل رسم المحيط المطلوب

وحيث انه يمكن ان يمد من النقطة ى مستقيم آخر مثل ى مَ يمس محيط الدائرة ح يعلم من ذلك ان لهذه المسئلة حلين

(الدعوى السادسه عشر العملية)

اذا علم مستقيمان غير اصمين مثل اـ و حى وكان المطلوب ايجاد اكبر مقياس مشترك بينهما كهذين :

ا ــــــــــــــــــ هـ ـــــ ب

ح ــــــــــــــــــ و ـــــ ى

فطريقة ذلك ان يوضع الخط الاصغر حى على الاكبر اـ مرة او اكثر بقدر انحصاره فيه فاذا اشتمل الخط الاكبر اـ على الخط الاصغر حى مرة واحدة مثلا وفضل باق مثل ـهـ اصغر من حى يوضع ايضا هذا الباقي ـهـ على الخط الاصغر حى فاذا اشتمل الخط حى على ـهـ مرتين مثلا وفضل باق مثل ى و اصغر من ـهـ يوضع ايضا الباقي الثاني ى و على الباقي الأول ـهـ فاذا اشتمل ـهـ على ى و ثلاث مرات بدون باق كان ى و اكبر مقياس مشترك بين المستقيمين المعلومين اـ و حى

لأن الباقي الاخير ى و انما تحصل باتباع القاعدة المقررة في علم الحساب المستعمله في ايجاد القاسم الاعظم المشترك بين عددين .

(تنبيه)

لايجاد النسبة بين المستقيمين اـ و حى بعد معرفة اكبر مقياس مشترك

اذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يمس ضلعى زاوية و يمر بنقطة معينة بينهما

طريقة ذلك ان تنصف الزاوية المعلومة بالمستقيم لب ثم ينزل من النقطة ا عمود مثل احا َ على لب ويؤخذ اَح بقدر اح فالمحيط الذى يكون مركزه على لب ويمر بالنقطة ا يمر ايضا بالنقطة اَ وحينئذ تؤول هذه المسئلة الى السابقة

واعلم انه يمكن رسم دائرتين كلاهما توافق حل المسئلة

(الدعوى الخامسة عشر العملية)

(شكل ٢٩٢)

اذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين مثل ا و ب ويمس محيط دائرة اخرى معلومة مثل ج

فطريقة ذلك ان يقال ليعرض ان المسئلة محلولة وان ا م ب هو المحيط المطلوب ولنمد المماس المشترك م ى حتى قابل القاطع ا ب ومد من النقطة ى مستقيم مثل ى هـ و قاطع لمحيط الدائرة المعلومة ج يلزم ان يكون

$$\overline{ى م}^2 = ى ب \times ى ا \quad \text{أو}$$

$$\overline{ى م}^2 = ى و \times ى هـ$$

ويلزم من هذا ان يكون

$$ى و \times ى هـ = ى ب \times ى ا$$

ويعلم من هذه المتساوية ان المحيط الذى يمر بالنقط ب و ا و هـ يمر بالنقطة و وحيث ان القاطع ى هـ و محدود بالاختيار من النقطة ى تكون النقطة هـ من جملة نقط المحيط ومن هنا تنتج طريقة رسمية هى ان يمر بالنقطتين المعلومتين ب و ا محيط دائرة يقطع محيط الدائرة المعلومة

اذا علم مستقيمان مثل اب و جد وكان المطلوب ايجاد مقدار مقرب من النسبة الكائنة بينهما كهذين

ا ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ن ـ ب

جـ ـــ هـ ــــــــــــــــــــــ د

فطريقة ذلك ان يقال ليكن المطلوب ايجاد نسبة اب الى جد باقل من عشر (اى ان المقدار المتروك يكون اقل من عشر) فلذلك يؤخذ الخط جهـ قدر عشر جد ثم يوضع جهـ على اب مرة أو اكثر بقدر عدد مرات انحصاره فيه فاذا اشمل اب على جهـ سبع مرات مثلا ووصل باق مثل ن ب اصغر من جهـ كانت النسبة بين الخطين اب و جد محصورة بين هذين العددين $\frac{٧}{١٠}$ و $\frac{٨}{١٠}$ فالعدد الاول $\frac{٧}{١٠}$ اقل من النسبة المطلوبة باقل من عشر والعدد الثانى $\frac{٨}{١٠}$ اكبر من النسبة المطلوبة باقل من عشر.

لانه يلزم من كون اب $>$ جد $\times \frac{٧}{١٠}$ و اب $<$ جد $\times \frac{٨}{١٠}$ ان تكون نسبة اب الى جد محصورة بين $\frac{٧}{١٠}$ و $\frac{٨}{١٠}$

(تنبيه)

بمثل هذه الطريقة يتحصل مقدار مقرب من النسبة الكائنة بين قوسين معلومين أو زاويتين معلومتين عندما يكون مقام الكسر الدال على درجة التقريب قوة للعدد ٢ غير ان الطريقة الآتية عمومية لانها صالحة لجميع الحالات

(الدعوى التاسعة عشر العملية)

اذا كان المطلوب ايجاد مقدار مقرب من النسبة الكائنة بين قوسين معلومين أو زاويتين معلومتين

فطريقة ذلك ان يقال ليكن ا و ب القوسين المعلومين او القوسين اللذين نسبتهما تساوى نسبة الزاويتين المعلومتين فلايجاد النسبة بين ا و ب مقربة باقل من سبع مثلا يضرب المقدار ا فى ٧ ثم يوضع ب على

بينهما يقال حيث تبين ان

به = ٣ دق و

جد = ٢ به + دق = ٦ دق + دق = ٧ دق و

اب = جد + به = ٧ دق + ٣ دق = ١٠ دق

يكون

اب : جد :: ١٠ دق : ٧ دق

وبقسمة حدى النسبة الثانية على دق يكون

اب : جد :: ١ : ٧

(الدعوى السابعة عشر العملية)

اذا علم قوسان غير اصمين وكان المطلوب ايجاد اكبر مقياس مشترك بينهما فطريقة ذلك ان يقال حيث انه يمكن ان يوضع احد القوسين على الآخر الذى نصف قطره كنصف قطر القوس الاول كما يمكن ان يوضع مستقيم على مستقيم آخر يتحصل اكبر مقياس مشترك بين القوسين المعلومين بعملية مشابهة للتى عملت لايجاد اكبر مقياس مشترك بين مستقيمين معلومين

(تنبيه)

اذا علمت زاويتان وكان المطلوب ايجاد اكبر مقياس مشترك بينهما فطريقة ذلك ان يرسم قوسان يحددان اضلاع الزاويتين المعلومتين بشرط ان يكون نصف القطر فى كليهما واحدا ثم يبحث عن اكبر مقياس مشترك بين هذين القوسين لتعلم النسبة بينهما فتكون النسبة المطلوبة مساوية للنسبة بين هذين القوسين

لانه قد تقرر فى تنبيه النظرية الثامنة عشر من المقالة الثانية انه اذا كان بين القوسين المأخوذين فى دائرة واحدة أو فى دائرتين متساويتين مقياس مشترك كانت نسبة احد القوسين الى الآخر كنسبة الزاوية المقابلة للقوس الاول الى الزاوية المقابلة للقوس الثانى

(الدعوى الثامنة عشر العملية)

اذا علم

من ١ ـ يكون

$$\frac{\text{اك}}{\text{اب}} = \frac{\text{اب}}{\text{٢اب} + \text{اك}} = \frac{1}{\text{٢} + \frac{\text{اك}}{\text{اب}}}$$

وبهذا تؤول المعادلة (١) الى هذه الصورة

$$\frac{\text{اح}}{\text{حب}} = \text{١} + \frac{1}{\text{٢} + \frac{\text{اك}}{\text{اب}}} \quad \ldots\ldots \ (\text{٢})$$

وحيث ان $\frac{\text{اك}}{\text{اب}} = \frac{1}{\text{٢} + \frac{\text{اك}}{\text{اب}}}$ يكون

$$\frac{\text{اح}}{\text{حب}} = \text{١} + \frac{1}{\text{٢} + \frac{1}{\text{٢} + \frac{\text{اك}}{\text{اب}}}}$$

ويعلم من ذلك ان هذا الكسر كسر متسلسل غير متناه فاذا حسب مقدار هذا الكسر الى الحد الرابع يوجد ان

$$\frac{\text{اح}}{\text{اب}} = \text{١} + \frac{\text{١٢}}{\text{٢٩}} = \frac{\text{٤١}}{\text{٢٩}}$$

اى ان النسبة التقريبية بين قطر المربع وضلعه هى :: ٤١ : ٢٩ واذا حسبت جملة حدود اكثر من السابقة سهل تحصيل نسبة اكثر قربا من هذه النسبة وقد ذكرنا فى النتيجة الثانية من النظرية العاشرة ان نسبة قطر المربع لضلعه كنسبة جذر الاثنين للواحد ولنذكر ما يدل على ذلك من الامثلة فنقول

(المثال الاول)

ان يكون المطلوب ايجاد قطر المربع الذى ضلعه خمسة اذرع وطريقة ذلك ان يضرب مقدار الضلع المعلوم فى هذه النسبة $\frac{\text{٤١}}{\text{٢٩}}$ فاذن يكون

$$\text{س} = \text{٥} \times \frac{\text{٤١}}{\text{٢٩}} = \frac{\text{٢٠٥}}{\text{٢٩}} = \text{٧} + \frac{\text{٢}}{\text{٢٩}}$$

او يضرب مقدار الضلع المعلوم فى $\sqrt{\text{٢}}$ فيحصل المطلوب

(المثال الثانى)

ان يكون المطلوب ايجاد ضلع المربع الذى قطره احد عشر ذراعا فطريقة ذلك ان يضرب مقدار القطر المعلوم فى هذه النسبة $\frac{\text{٢٩}}{\text{٤١}}$ او يقسم القطر المعلوم على $\sqrt{\text{٢}}$ فيحصل المطلوب

ب ا مرارا بقدر انحصاره فيه فاذا اشتمل ١٧ على ب خمس عشرة مرة ووصل باق بوحدان

$$١٧ب < ١٥ \times ب \quad و \quad ١٧ب > ١٦ \times ب$$

فاذن يكون

$$١ب < \frac{١٥}{٧} \times ب \quad و \quad ١ب > \frac{١٦}{٧} \times ب$$

ويعلم من ذلك ان نسبة ا الى ب محصورة بين $\frac{١٥}{٧}$ و $\frac{١٦}{٧}$ فالمقدار الاول $\frac{١٥}{٧}$ ينقص عن النسبة المطلوبة باقل من سبع والمقدار الثاني $\frac{١٦}{٧}$ يزيد عن النسبة المطلوبة باقل من سبع

(تنبيه)

اعلم انه يمكن استعمال هذه الطريقة لايجاد مقدار يقرب من النسبة الكائنة بين مستقيمين معلومين

(الدعوى العشرون العملية)

(شكل ١٥٤ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب ايجاد نسبة تقريبية بين قطر المربع وضلعه فطريقة ذلك ان يقال ليكن ابحد مربعا و اح قطره فلايجاد نسبة تقريبية بين القطر اح والضلع حب يوضع الضلع حب على القطر اح وذلك بان تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر حب ويركز في النقطة ح ويرسم نصف دائرة فيظهر ان القطر اح قدر الضلع حب مرة واحدة ويبقى كسر مثل اد اصغر من حب فاذن يكون

$$\frac{اح}{حب} = ١ + \frac{اد}{حب} = ١ + \frac{اد}{اب} \quad \cdots\cdots \quad (١)$$

ولمعرفة مقدار الكسر اد يقال يلزم من كون الزاوية ابح قائمة ان يكون الخط اب مماسا للمحيط ويلزم من هذا ان يكون

اد : اب :: اب : اهـ او

$\frac{اد}{اب} = \frac{اب}{اهـ}$ كما تقرر ذلك في المطرية الثانية والثلاثين

وحيث ان الخط اهـ يشتمل على اب مرتين ويبقى كسر مثل اد اصغر

(المثال الثاني)

ان يكون المطلوب ايجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين مثلثين أو شكلين كثيري الاضلاع معلومين فطريقة ذلك ان يقال حيث انه يمكن تحويل اى شكل كثير الاضلاع الى مربع يكافئه يعلم من ذلك انه لايجاد المستقيمين المطلوبين يلزم ان يبحث عن ضلع المربع المكافى لاحد الشكلين المعلومين وعن ضلع المربع المكافىء للشكل الآخر فالثالث المتناسب مع ضلعي هذين المربعين يكون هو المطلوب

(المثال الثالث)

اذا كان المطلوب ايجاد مستقيمين مثل س و ص تكون نسبة احدهما الى الآخر كنسبة حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة مثل ا و ب و ح الى حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة كذلك مثل اَ و بَ و حَ

فطريقة ذلك ان يقال حيث كان المطلوب ان يكون

$$\text{س} : \text{ص} :: \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ح} : \text{اَ} \times \text{بَ} \times \text{حَ}$$

ينتج من ذلك أن

$$\text{س} = \frac{\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ح} \times \text{ص}}{\text{اَ} \times \text{بَ} \times \text{حَ}} .$$

وحيث ان احد الخطين المطلوبين اختياري يمكن ان يجعل ص = حَ وحينئذ يكون

$$\text{س} = \frac{\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ح}}{\text{اَ} \times \text{بَ}} = \frac{\text{ا} \times \text{ب}}{\text{اَ}} \times \frac{\text{ح}}{\text{بَ}} .$$

فيعلم من هذه المعادلة انه يلزم ان يبحث اولا عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة اَ و ا و ب وليكن ل مثلا وثانيا عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة بَ و ل و ح وليكن لَ فيكون لَ مساويا

(الدعوى الحادية والعشرون العملية)

اذا كان المطلوب ايجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين مستطيلين معلومين

فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف ا لاحد بعدى المستطيل الاول وبالحرف ب لبعده الآخر وبالرمزين اَ و بَ لبعدى المستطيل الثانى وبالحرفين س و ص للمستقيمين المطلوبين ثم يقال حيث كان المطلوب ان يكون

$$س : ص :: ا \times ب : اَ \times بَ$$ ينتج أن

$$س = \frac{ا \times ب \times ص}{اَ \times بَ}$$

وحيث ان احد الخطين اختيارى فلا مانع من فرض الخط ص مساويا للخط بَ او للخط اَ فاذا جعل ص = بَ آلت المعادلة السابقة الى هذه

$$س = \frac{ا \times ب}{اَ}$$ ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$اَ : ا :: ب : س$$

فيعلم من ذلك ان ثانى الخطين المطلوبين س رابع متناسب مع الخطوط الثلاثة اَ و ا و ب فاذا بحث عن هذا الرابع المتناسب كانت نسبته الى الخط بَ مساوية لنسبة المستطيل ا × ب الى المستطيل اَ × بَ

وعاذكر يحل مايذكره من الامثلة فنقول

(المثال الاول)

ان يكون المطلوب ايجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين مربعين معلومين مثل $ا^2$ و $اَ^2$ فطريقة ذلك ان يبحث عن الثالث المتناسب مع الخطين اَ و ا

وهو المطلوب

وكل مثال من هذا القسل يحل بالطريقة المذكورة

(الدعوى الثانية والعشرون العملية)

(شكل ١٤٦ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء مثلث يكافىء شكلا كثير الاضلاع معلوما فطريقة ذلك ان يقال ليكن ا ب ج د هـ الشكل المعلوم فيوصل اولا القطر جـ هـ الذي يفصل المثلث جـ د هـ ثم يرسم من النقطة د مستقيم مثل د و يوازي جـ هـ ويمد حتى يقطع الامتداد ا هـ ثم يوصل جـ و فيكون الشكل الكثير الاضلاع ا ب جـ د هـ مكافئا للشكل ا ب جـ و الناقص عنه ضلعا لان للمثلثين جـ د هـ و جـ و هـ قاعدة مشتركة هي جـ هـ وارتفاعا مشتركا لان رأسيهما د و و موضوعتان على الخط د و الموازي للقاعدة فاذن يكون هذان المثلثان متكافئين فاذا اضيف لكل منهما الشكل ا ب جـ هـ ينتج ان الشكل ا ب جـ د هـ مكافىء للشكل ا ب جـ و ويعمل هذا يمكن فصل الزاوية ب بان يبدل المثلث ا ب جـ بالمثلث ا ز جـ المكافىء له وحينئذ يتحول المخمس ا ب جـ د هـ الى مثلث يكافئه وهو ز جـ و

وهذه الطريقة يمكن تطبيقها على اي شكل كثير الاضلاع كائنا ما كان عدد اضلاعه لان الشكل الذي يكون عدد اضلاعه م مثلا يتحول في المرة الاولى الى شكل يكافئه عدد اضلاعه م ــ ١ وهذا يتحول الى شكل آخر يكافئه عدد اضلاعه م ــ ٢ وهكذا فلا بد ان ينتهي هذا التحويل الى مثلث يكافىء الشكل المفروض

(تنبيه)

قد تقدم ان كل مثلث يمكن تحويله الى مربع يكافئه وذكرنا عملية ذلك في الدعوى السابعة العملية فحينئذ يمكن دائما انشاء مربع يكافىء مضلعا

لمقدار الخط المجهول س وحينئذ يكون

لَ : حَ :: ا × ب × ح : أَ × بَ × حَ

(المثال الرابع)

ان يكون المطلوب ايجاد مستقيمين مثل س و صه تكون نسبة احدهما الى الآخر كنسبة حاصل ضرب اربعة خطوط مستقيمة معلومة مثل ا و ب و ح و ى الى حاصل ضرب اربعة خطوط مستقيمة معلومة كذلك مثل أَ و بَ و حَ و ىَ

فطريقة ذلك ان يقال حيث كان المطلوب ان يكون

س : صه :: ا × ب × ح × ى : أَ × بَ × حَ × ىَ

ينتج أن

س = (ا × ب × ح × ى × صه) / (أَ × بَ × حَ × ىَ)

وحيث ان احد الخطين اختياري يمكن ان يجعل صه = ىَ وحينئذ يكون

س = (ا × ب × ح × ى) / (أَ × بَ × حَ) = (ا × ب) / أَ × ح / بَ × ى / حَ

فيعلم من هذه المعادلة انه يلزم ان يبحث اولا عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة أَ و ا و ب وليكن ل مثلا وثانيا عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة بَ و ل و ح وليكن لَ وثالثا عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة حَ و لَ و ى وليكن لً فيكون احد المستقيمين المطلوبين س = لً والمستقيم الآخر صه = ىَ فاذن يكون

لً : ىَ :: ا × ب × ح × ى : أَ × بَ × حَ × ىَ

وهو

الضلع الآخر هر اعنى ان

$$\overline{هح}^2 = \overline{رح}^2 - \overline{هر}^2$$

وحيث ان رح = ا و هر = ب يكون

$$\overline{هح}^2 = ا^2 - ب^2$$ وهو المطلوب

(تنبيه)

يمكن ايجاد مربع يساوى مجموع مربعات بقدر ما يراد لان العملية التى بواسطتها يتحول المربعان الى مربع واحد يتحول بها ثلاث مربعات الى مربعين وهذان المربعان يتحولان الى واحد

وكذا يمكن ايجاد مربع يساوى الفاصل بين جملة مربعات وجملة مربعات اخر اقل من مجموع الاول

(امثلة)

(المثال الاول)

ان يكون المطلوب ايجاد مربع يساوى مجموع ثلاثة مربعات معلومة طريقة ذلك ان يرمز بالحرف س لضلع المربع المطلوب وبالحرف ح لضلع المربع الاول وبالحرف ى لضلع المربع الثانى وبالحرف هـ لضلع المربع الثالث فعلى منطوق المثال يكون

$$س^2 = ح^2 + ى^2 + هـ^2$$

ويعلم من هذه المعادلة انه يلزم ان يبحث عن مربع يساوى مجموع المربعين الاولين $ح^2$ و $ى^2$ وليكن $م^2$ ثم يبحث عن مربع يساوى $م^2 + هـ^2$ وليكن $ن^2$ فيكون $ن^2$ هو المربع المطلوب

وعملية الرسم ان ترسم زاوية قائمة مثل ب ا ح كما فى (الشكل ٢٩٣) ويؤخذ البعد اح = ح والبعد اى = ى ويوصل ى ح ثم يقام العمود ى و على ى ح ويؤخذ البعد ى هـ = هـ ويوصل هـ ح

مستويا معلوما وهذا هو المسمى تربيع الشكل المستقيم الاضلاع
ومسئلة تربيع الدائرة مقصورة على ايجاد مربع يكافىء دائرة قطرها معين

(الدعوى الثالثة والعشرون العملية)

(شكل ١٤٧ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء مربع يساوى مجموع مربعين معلومين او فاصلهما
فطريقة ذلك ان يقال ليكن ا ضلع احد المربعين المعلومين و ب ضلع
المربع الآخر ولايجاد مربع يساوى مجموع هذين المربعين يرسم مستقيمان
متعامدان مثل هو و هح غير متناهيين ثم يؤخذ هى بقدر الضلع
ا و هر بقدر الضلع ب ويوصل ىر فيكون ىر هو ضلع المربع
المطلوب

لانه يلزم من كون المثلث ىهر قائم الزاوية فى ه ان يكون المربع
المنشأ على الوتر ىر مساويا لمجموع المربعين المنشأين على الضلعين ىه
و هر فاذن يكون

$$\overline{ىر}^٢ = \overline{ىه}^٢ + \overline{هر}^٢$$

وحيث ان ىه = ا و هر = ب يكون

$$\overline{ىر}^٢ = ا^٢ + ب^٢$$ وهو المطلوب

ولايجاد مربع يساوى فاصل هذين المربعين المعلومين يرسم مستقيمان
متعامدان مثل ح ح و هو غير متناهيين ثم يؤخذ البعد هر
قدر اصغر الضلعين المعلومين ا و ب ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر البعد
رح المساوى لاكبر الضلعين المعلومين ا و ب ويركز فى النقطة ر
ويرسم قوس دائرة يقطع الخط هح فى نقطة مثل ح فيكون هح
هو ضلع المربع المساوى للفاصل بين المربعين المعلومين ا^٢ و ب^٢
لانه يلزم من كون المثلث هرح قائم الزاوية فى ه ان يكون المربع
المنشأ على الضلع هح مساويا للفاصل بين مربع الوتر رح ومربع

$س = \sqrt{25} = 5$

اعني ان ضلع المربع المطلوب يساوي خمسة اذرع

(المثال الرابع)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المساوي لفاضل مربعين ضلع احدهما يساوي ثلاث عشرة ذراعا وضلع الآخر يساوي اثني عشرة ذراعا وطريقة ذلك ان يرمز بالحرف س للضلع المطلوب وعلى منطوق المثال يكون

$س^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$

ويلزم من هذا ان يكون

$س = \sqrt{25} = 5$

اعني ان ضلع المربع المطلوب يساوي خمس اذرع

(الدعوى الرابعة والعشرون العملية)

(شكل ۱۵۰ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء مربع نسبته الى المربع المعلوم ا ب ج د كنسبة خط معلوم مثل ك لخط آخر كذلك مثل ل

فطريقة ذلك ان يرسم مستقيم غير متناه مثل هـ ر ويؤخذ عليه البعد هـ و = ك والبعد و ر = ل ويرسم نصف محيط قطره هـ ر ويقام من النقطه و العمود و ح على القطر ثم يوصل الوتران ح هـ و ح ر ويمدان بغير تحديد ثم يؤخذ ح ى يساوي ا ب الذي هو ضلع المربع المعلوم ثم يمد من النقطة ى مستقيم مثل ى ط يوازي هـ ر فيكون ح ط ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من توازي هـ ر و ط ى ان يكون

ح ط : ح ى :: ح هـ : ح ر

وقد تقرر في علم الحساب ان المقادير المتناسبة مربعاتها متناسبة فاذن يكون

فيكون هد هو ضلع المربع المطلوب

(المثال الثاني)

ان يكون المطلوب ايجاد مربع يساوى الفاصل بين خمسة مربعات معلومة وثلاثة مربعات اخر معلومة كذلك

فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف س لضلع المربع المطلوب وبالحروف ا و ب و ح و ى و ه لاضلاع المربعات الخمسة وبالرموز اَ و بَ و حَ لاضلاع المربعات الثلاثة التي يراد طرحها من المربعات الاول فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{س}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ح}^2 + \text{ى}^2 + \text{ه}^2 - \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2 - \text{حَ}^2$$ او

$$\text{س}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ح}^2 + \text{ى}^2 + \text{ه}^2 - (\text{اَ}^2 + \text{بَ}^2 + \text{حَ}^2)$$

ويعلم من هذه المتساوية انه يلزم ان يبحث اولا عن مربع مثل م^2 يساوى مجموع المربعات ا^2 و ب^2 و ح^2 و ى^2 و ه^2 وثانيا عن مربع مثل مَ^2 يساوى مجموع المربعات اَ^2 و بَ^2 و حَ^2 ثم يبحث عن مربع مثل ك^2 يساوى الفاصل بين هذين المربعين م^2 و مَ^2 فيكون ك^2 هو المربع المطلوب

(المثال الثالث)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المساوى لمجموع مربعين ضلع احدهما يساوى اربع اذرع وضلع الآخر يساوى ثلاث اذرع فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف س للضلع المطلوب فعلى منطوق المسئلة يكون

$$\text{س}^2 = ٤^2 + ٣^2 = ١٦ + ٩ = ٢٥$$

ويلزم من هذا ان يكون

ع مثل ا ب ح ى كما فى (الشكل ٢٩٤) وكان المطلوب انشاء
ب ثلاثة امثاله فى السطح
ك ان يوصل القطر ب ى ويؤخذ ب هـ بقدر ب ى ثم يقام
ى و على ب هـ ويمد هـ و حتى يقطع ب ى ثم يؤخذ هـ ح
ح ويوصل ح و فيكون ح و ضلع المربع المطلوب

ن كون $\overline{ح و}^2 = \overline{ح هـ}^2 + \overline{هـ و}^2$ و

$\overline{هـ و}^2 = ٣ \overline{ب ح}^2$ ان يكون

$\overline{ح و}^2 = ٣ \overline{ب ح}^2$ وهو المطلوب

(طريقة اخرى)

س ضلع المربع المطلوب و ح ضلع المربع المعلوم فعلى منطوق
ن

$س^2 = ٣ ح^2$ أو $س^2 = ح \times ٣ ح$

المعادلة ينتج أن

ح : س :: س : ٣ ح

ده المناسبة ان ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مستقيمين
يساوى ضلع المربع المعلوم والآخر يساوى ثلاثة امثاله

(المثال الثالث)

بع مثل $ح^2$ وكان المطلوب ايجاد مربع اخر مساحته مساوية
لربع المعلوم مضروبة فى كمية معينة مثل م
للشان يقال ليكن س ضلع المربع المطلوب فعلى منطوق المثال

$س^2 = ح^2 \times م = ح \times ح م$

$\overline{\text{حط}}^2 : \overline{\text{حب}}^2 .. \overline{\text{حه}}^2 : \overline{\text{حر}}^2$ .... (١)

وحيث ان المثلث هحر قائم الزاوية في ح يكون

$\overline{\text{حه}}^2 : \overline{\text{حر}}^2 ::$ هو : ور أو :: الخط ك : الخط ل

كما تقرر ذلك في النظرية الثالثة والعشرين ويلزم من اشتراك نسبة $\overline{\text{حه}}^2 : \overline{\text{حر}}^2$ في هذه المتناسبة وفي المتناسبة (١) ان يكون

$\overline{\text{حط}}^2 : \overline{\text{حب}}^2 ::$ الخط ك : الخط ل

وحيث كان حب = اب يلزم ان يكون

$\overline{\text{حط}}^2 : \overline{\text{اب}}^2 ::$ الخط ك : الخط ل

والمطلوب ان يكون

$\text{س}^2 : \overline{\text{اب}}^2 ::$ الخط ك : الخط ل

فاذن يكون $\text{س}^2 = \overline{\text{حط}}^2$ وهو المطلوب

(امثلة)

(المثال الاول)

اذا علم مربع مثل ابجد كما في (الشكل ٢٩٤) وكان المطلوب انشاء مربع ضعفه

فطريقة ذلك ان يوصل القطر بد ويؤخذ به بقدر بد فيكون به ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من كون $\overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{جد}}^2 = 2\,\overline{\text{بج}}^2$ ان يكون

$\overline{\text{به}}^2 = 2\,\overline{\text{بج}}^2$ وهو المطلوب

(المثال الثاني)

أو $\text{ح}^2 . \overline{\text{ع س}}^2 :: \text{م} : 1$

ومن هذه المناسبة ينتج ان

$\overline{\text{ع س}}^2 = \frac{\text{ح}^2}{\text{م}}$ وهو المطلوب

فاذا كان المطلوب ايجاد مربع مساحته خمس مساحة مربع معلوم مثل ح^2 يبحث عن الوسط المتناسب بين مستقيمين احدهما يساوي ضلع المربع المعلوم ح والآخر يساوي خمسه ثم ينشأ على الوسط المتناسب المذكور مربع يكون هو المطلوب

واذا كان المطلوب ايجاد مربع مساحته خمسة امثال مساحة مربع معلوم مثل ح^2 يبحث عن الوسط المتناسب بين مستقيمين احدهما يساوي ضلع المربع المعلوم ح والآخر يساوي خمسة امثاله ثم ينشأ على الوسط المتناسب المذكور مربع يكون هو المطلوب

* (المثال الخامس) *

ان يكون المطلوب انشاء مربع نسبته الى مربع معلوم كنسبة ٣ الى ٥

فطريقة ذلك ان يرسم مستقيم كيف اتفق ويجعل وحدة خطيه ثم يرسم مستقيم غير متناه مثل هر كما في (الشكل ١٥٠) من اللوحة ٦ ويؤخذ عليه بعد مثل هو يساوي ثلاثة امثال الوحدة المذكورة ثم يؤخذ بجانبه بعد مثل ور يساوي خمسة امثال الوحدة المذكورة ويرسم نصف محيط دائرة قطرها هر ويقام من النقطة و العمود وح على القطر ثم يوصل الوتران حه و حر ويمدان بغير تحديد ثم يؤخذ حى بقدر ضلع المربع المعلوم ويمد من النقطة ى مستقيم مثل ىط يوازي هر فيكون حط مساويا لضلع المربع المطلوب

اعني ان نسبة المربع المنشأ على حط الى المربع المعلوم كنسبة الثلاثة

ويعلم من ذلك ان ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مستقيمين احدهما يساوى ضلع المربع المعلوم والآخر يساوى حاصل ضرب هذا الضلع فى الكمية المراد ضرب المربع المعلوم فيها وحينئذ اذا بحث عن الوسط المتناسب المذكور وانشئ عليه مربع كان هو المربع المطلوب

(المثال الرابع)

اذا علم مربع ضلعه ح وكان المطلوب ايجاد ضلع مربع آخر مساحته مساوية لمساحة المربع المعلوم مقسومة على كمية معينة مثل م

وطريقة ذلك ان يقال ليكن س ضلع المربع المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{س}^2 = \frac{\text{ح}^2}{\text{م}} = \text{ح}^2 \times \frac{1}{\text{م}} = \text{ح} \times \frac{\text{ح}}{\text{م}}$$

ويلزم من هذا ان يكون

$$\text{ح} : \text{س} :: \text{س} : \frac{\text{ح}}{\text{م}}$$

فيعلم من ذلك ان ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين ح و $\frac{\text{ح}}{\text{م}}$ فلايجاد مقدار الضلع س يرسم نصف محيط دائرة قطره يساوى ضلع المربع المعلوم ح ويقسم هذا القطر الى اقسام متساوية عددها يساوى م ثم يقام من النقطة ص التى هى النهاية المشتركة بين القسم الاول والثانى عمود على القطر ويمد حتى ينتهى الى المحيط ثم يوصل الوتر سع فيكون سع ضلع المربع المطلوب

لان

$$\overline{\text{عح}}^2 : \overline{\text{عس}}^2 :: \text{عح} : \text{عص}$$

وحيث ان $\text{عح} = \text{عص} \times \text{م}$ يكون

$$\overline{\text{عح}}^2 : \overline{\text{عس}}^2 :: \text{عص} \times \text{م} : \text{عص}$$

وبقسمة حدى النسبة الثانية على عص يكون

$$\overline{\text{عح}}^2 : \overline{\text{عس}}^2 :: \text{م} : 1$$

، والعشرون العملية) *

لوب انشاء شكل يشابههما ويساوى

ح لمساحة احد الشكلين وبالحرف ا

لمساحه الشكل الآخر وبالحرف ب

، س لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف

بين ا و ب ثم يقال حيث ان نسبة

سبة مربعات اضلاعها المتناظرة الى بعضها

٢ ٢
: ب

٢ ٢ ٢
: : ا . ا + ب

٢ ٢
ا : ص

س = ح + ك ينتج من مقارنة

٢
ب

وتر مثلث قائم الزاوية ضلعاه المحيطان بزاويته

اذا انشئ على الضلع ص شكل مشابه

يكون هو الشكل المطلوب اى المساوى

ون الشكل س مساويا لفاضل الشكلين

س = ح ـ ك يقال حيث أن

للخمسة

(حل آخر)

ليكن س ضلع المربع المطلوب و ح ضلع المربع المعلوم فعلى منطوق المثال يكون

$$س^٢ : ح^٢ :: ٣ : ٥$$

ومن هذه المناسبة ينتج ان

$$س^٢ = ح^٢ \times \frac{٣}{٥} = ح \times \frac{٣ح}{٥}$$

ويلزم من هذا ان يكون

$$ح : س :: س : \frac{٣ح}{٥}$$

فيعلم من ذلك ان ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مستقيمين احدهما يساوى ضلع المربع المعلوم والآخر يساوى ثلاثة اخماسه

(الدعوى الخامسة والعشرون العملية)

(شكل ١٢٩ من اللوحة ٥)

اذا علم شكل مستقيم الاضلاع مثل ا ب ح د هـ وكان المطلوب انشاء شكل مشابه له على ضلع معلوم مثل و ر الذى هو نظير الضلع ا ب

فطريقة ذلك ان توصل اقطار الشكل المعلوم وهى ا ح و ا د ثم تنشأ فى النقطة و زاوية مثل ر و ح تساوى الزاوية ب ا ح وتنشأ فى النقطة ر زاوية مثل و ر ح تساوى الزاوية ا ب ح فالمثلث و ر ح الحادث من تلاقى الخطين و ح و ر ح يكون مشابها للمثلث ا ب ح وكذا ينشأ مثلث مثل و ح ط على الضلع و ح الذى هو نظير الضلع ا ح يشابه المثلث ا د ح وينشأ ايضا مثلث مثل و ط ى على الضلع و ط الذى هو نظير الضلع ا د يشابه المثلث ا د هـ فالشكل الحادث و ر ح ط ى يكون هو الشكل المطلوب المشابه لكثير الاضلاع المعلوم ا ب ح د هـ لان هذين الشكلين مركبان من عدد واحد من المثلثات المتشابهة والمتماثلة الوضع

*(الدعوى

(امثلة)

(المثال الاول)

ان يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما ومساحته ربع مساحة الشكل المعلوم

فطريقة ذلك ان يرسم مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعد يساوي نصف احد اضلاع الشكل المعلوم ويعتبران ضلعين متناظرين ثم ينشا على هذا البعد شكل يشابه الشكل المعلوم ويكون هو الشكل المطلوب

(المثال الثاني)

ان يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما ومساحته تسعة امثال مساحة الشكل المعلوم

فطريقة ذلك ان يرسم مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعد يساوي ثلاثة امثال احد اضلاع الشكل المعلوم ويعتبران ضلعين متناظرين ثم ينشا على هذا البعد شكل يشابه الشكل المعلوم ويكون هو الشكل المطلوب

(المثال الثالث)

ان يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما ونسبة مساحته الى مساحة الشكل المعلوم كنسبة الثلاثة الى السبعة

فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف ح لمساحة الشكل المعلوم وبالحرف ا لاحد اضلاعه وبالحرف س لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف ص لضلعه المناظر للضلع ا فعلى منطوق المثال يكون

$$س : ح :: ٣ : ٧$$

وحيث ان هذين الشكلين متشابهان يكون

$$س : ح :: ص^{٢} : ا^{٢}$$

فينتج من هاتين المتناسبتين ان

$$ص^{٢} : ا^{٢} :: ٣ : ٧$$

ح ∙ ك :: أ^{2} : ب^{2} يلزم ان يكون

ح ∙ ح ـ ك :: أ^{2} : أ^{2} ـ ب^{2} وكذا يكون

ح : س :: أ^{2} : ص^{2}

فينتج من مقارنة هاتين المتناسبتين ان

ص^{2} = أ^{2} ـ ب^{2}

ويعلم من ذلك ان الضلع ص هو ضلع من مثلث قائم الزاوية وتره أ وضلعه الآخر ب وانه اذا انشئ على الضلع ص شكل مشابه للشكل ح أو للشكل ك يكون هو الشكل المطلوب اى المساوى لفاضلهما

(الدعوى السابعة والعشرون العملية)

اذا كان المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما وتكون نسبته اليه كنسبة مقدار معين مثل م الى مقدار آخر كذلك مثل ن

فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف ح لمساحة الشكل المعلوم وبالحرف أ لاحد اضلاعه وبالحرف س لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف ص لضلعه المناظر للضلع أ فعلى منطوق المسئلة يكون

س : ح :: م : ن

وحيث ان هذين الشكلين متشابهان يكون

س : ح :: ص^{2} : أ^{2}

فينتج من هاتين المتناسبتين أن

ص^{2} : أ^{2} :: م : ن

فحينئذ يتعين الضلع ص بالطريقة المقررة فى الدعوى الرابعة والعشرين العملية وبعد تعيينه ينشأ عليه شكل مشابه للشكل المعلوم ح فيكون هو المطلوب

(امثلة)

للشكل ل ثم يبحث عن الرابع المتناسب مع هذه الخطوط الثلاثة ويناشا عليه شكل مشابه للشكل ك فيكون هو الشكل المطلوب

(امثلة)

(المثال الاول)

ان يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ شبه منحرف معلوم رمزه ل

فطريقة ذلك ان يرسم مستقيم كيف اتفق مثل ا وينشا عليه مثلث متساوى الاضلاع يرمز له بالحرف ك ثم يبحث عن ضلع المربع المكافئ للشكل ك ويرمز له بالحرف م وعن ضلع المربع المكافئ للشكل ل ويرمز له بالحرف د وعن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة م و د و ا ثم ينشا عليه مثلث متساوى الاضلاع فيكون هو المثلث المطلوب اى المكافئ لشبه المنحرف المعلوم

(المثال الثانى)

ان يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ شكلا متوازى الاضلاع معلوما رمزه ل

فطريقة ذلك ان يرسم مستقيم كيف اتفق مثل ا وينشا عليه مثلث متساوى الاضلاع يرمز له بالحرف ك ثم تتم العملية كما فى المثال الاول

(المثال الثالث)

ان يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ مثلثا مختلف الاضلاع معلوما رمزه ل

فطريقة ذلك ان يرسم مستقيم كيف اتفق مثل ا وينشأ عليه مثلث متساوى الاضلاع يرمز له بالحرف ك ثم تتم العملية كما فى المثال الاول

(المثال الرابع)

ان يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ شكلا مخمسا معلوما رمزه ل

حينئذ يتعين الضلع ص كما في المثال الخامس من الدعوى الرابعة والعشرين العملية وبعد تعيينه ينشأ عليه شكل مشابه للشكل المعلوم خ فيكون هو الشكل المطلوب

(الدعوى الثامنة والعشرون العملية)

(شكل ١٥١ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما مثل الشكل ك ويكافئ شكلا آخر معلوما كذلك مثل الشكل ل

فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف ا لاحد اضلاع الشكل ك وبالحرف س لساحة الشكل المطلوب وبالحرف ص لضلعه المناظر للضلع ا ثم يقال حيث كان المطلوب ان يكون الشكل س مشابها للشكل ك يلزم ان يكون

$$ك : س :: ا^٢ : ص^٢$$

وحيث كان المطلوب ايضا ان يكون الشكل س مكافئا للشكل ل يلزم ان يكون

$$ك : ل :: ا^٢ : ص^٢$$

حينئذ اذا بحث عن المربع م^٢ المكافئ للشكل ك. وعن المربع د^٢ المكافئ للشكل ل يكون

$$م^٢ : د^٢ :: ا^٢ : ص^٢$$

ومن هذه المتناسبة ينتج ان

$$م : د :: ا : ص$$

فيعلم من هذه المتناسبة ان الضلع ص رابع متناسب مع الخطوط الثلاثة م و د و ا ومن هنا تنتج طريقة رسمية هي

ان يبحث عن ضلع المربع المكافئ للشكل ك وعن ضلع المربع المكافئ

للشكل

(دروس فى المقالة الرابعة)

المقالة الرابعة يبحث فيها عن خواص الاشكال المستقيمة الاضلاع المنتظمة ومساحة الدائرة

(تعريف)

الشكل المنتظم ماتساوت زواياه واضلاعه وكل شكل مستقيم الاضلاع يكون منتظما اذا تساوت زواياه واضلاعه سواء كان مثلثا اوشكلا رباعيا أو مخمسا أومسدسا أوغير ذلك

(الدعوى الاولى المطربة)

(شكل ١٥٥ من اللوحة ٦)

كل شكلين منتظمين متحدين فى عدد الاضلاع يكونان متشابهين

فاذا كان الشكل ا ب جـ د هـ و مسدسا منتظما و ز ح ط ى ك ل مسدسا آخر كذلك كان مجموع الزوايا المحيطية فى الشكل الاول مساويا لثمانى قوائم كما تقرر ذلك فى المطربة التاسعة والثلاثين من المقالة الاولى ومجموع الزوايا المحيطية فى الشكل الثانى يساوى ثمانى قوائم ويلزم من هذا ان تكون الزاوية ا = سدس الثمان قوائم والزاوية ز = سدس الثمان قوائم فاذن تكون الزاوية ا = للزاوية ز والزاوية ب = ح والزاوية جـ = ط وهكذا

ويلزم من كون الشكل الاول منتظما ان يكون

ا ب = ب جـ = جـ د = د هـ = هـ و = و ا

وكذا يلزم من كون الشكل الثانى منتظما ان يكون

ز ح = ح ط = ط ى = ى ك = ك ل = ل ز

ويلزم من هذا ان يكون

ا ب : ز ح :: ب جـ : ح ط :: جـ د : ط ى :: د هـ : ى ك الخ

فاذن يكون الشكل ا ب جـ د هـ و مشابها للشكل ز ح ط ى ك ل

فطريقة ذلك ان يحول المخمس الى مثلث يكافئه ثم يحول هذا المثلث الى مثلث متساوى الاضلاع فيكون هو المطلوب

تمت المقالة الثالثة على يد جامعه المتوكل على ربه المعيد المبدى
على عزت افندى احد خوجات العلوم الطبيعية
والرياضية بمدرسة المهندسخانة الخديوية
ووكيل المدرسة التجهيزية
والمدرسة الابتدائية

مساويا للبعد ط ا ويلزم من هذا ان تكون النقطة د على المحيط الذى يمر بالنقط الثلاث ا و ب و ح وبمثل هذا يبرهن على ان المحيط الذى يمر بالرؤس الثلاث ب و ح و د يمر ايضا بالرأس التالية لها وهى هـ وهكذا

فقد ثبت بهذا ان المحيط الذى يمر بالنقط الثلاث ا و ب و ح يمر بجميع رؤس زوايا الشكل المنتظم المفروض وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال حيث كانت الاضلاع اب و بح و حد الخ اوتارا متساوية تكون ابعادها عن المركز متساوية كما تقرر ذلك فى المقالة الثانية فحينئذ اذا رسم محيط دائرة نصف قطره طب ومركزه ط كان ذلك المحيط مماسا للضلع بح فى وسطه وفى اواسط سائر اضلاع الشكل المنتظم المفروض

(تنبيه)

اعلم ان النقطة ط التى هى المركز المشترك للدائرة المرسومة داخل الشكل المنتظم وللدائرة المرسومة خارجه يمكن ان تعتبر ايضا مركزا للشكل المذكور وحينئذ يقال للزاوية التى مثل اطب اى المحصورة بين نصفى قطرين واصلين الى نهايتى ضلع واحد مثل اب زاوية مركزية

وحيث ان جميع الاوتار اب و بح الخ متساوية يعلم من ذلك ان الزوايا المركزية متساوية وحينئذ يتعين مقدار كل من تلك الزوايا بقسمة مجموع الاربع زوايا القائمة على عدد اضلاع الشكل

(الدعوى الثالثة النظرية)

(شكل ٢٣ من اللوحة ١٧)

كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة اذا كان متساوى الاضلاع كان متساوى الزوايا

وكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة اذا كان متساوى الزوايا كانت اضلاعه متساوية مثنى

كما تقرر ذلك فى المطرية السابعة والعشرين من المقالة الثالثة

(نتيجة)

النسبة بين محيطى كثيرى الاضلاع المنتظمين المتحدين فى عدد الاضلاع كالنسبة بين ضلعين متناظرين والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى ضلعين متناظرين لان الشكلين اللذين بهذه المثابة متشابهان وقد تقرر فى المطرية الثامنة والعشرين من المقالة الثالثة ان النسبة بين محيطى كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين وان النسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى ضلعين متناظرين

(تنبيه)

يتعين مقدار زاوية اى شكل منتظم عدد اضلاعه معين بتقسيم مجموع زواياه على عدد اضلاعه كما يتعين مقدار زاوية اى شكل متساوى الزوايا عدد اضلاعه معين انظر الدعوى التاسعة والثلاثين من المقالة الاولى

(الدعوى الثانية النظرية)

(شكل ١٥٦ من اللوحة ٦)

كل شكل منتظم يمكن رسمه فى الدائرة ورسم دائرة فيه

(برهان القضية الاولى) ان يقال ليكن ا ب ج د هـ الخ شكلا منتظما فلو تصور مرور محيط دائرة بالنقط الثلاث ا و ب و ج وكان مركزه ط وانزل العمود ط ى على ب ج ووصل ط ا و ط د لكان الشكل الرباعى ط ى ج د مساويا للشكل الرباعى ط ى ب ا لانه لو جعل الضلع ط ى ضلعا مشتركا وطبق الشكل ط ى ج د على الشكل ط ى ب ا لانطبقت الزاوية القائمة ج ى ط على القائمة ب ى ط ووقعت النقطة ج على النقطة ب ويلزم من كون الشكل ا ب ج د هـ الخ منتظما ان تكون الزاوية ج د هـ = ا ب ج وان يقع الضلع ج د على استقامة الضلع ب ا وحيث ان ج د = ب ا تقع النقطة د فى ا ويتحد الشكلان الرباعيان فحينئذ يكون البعد ط د

مساويا

الثانى وكانت جميع اصلاع الشكل متساوية

(الدعوى الرابعة المطرية)

(شكل ٢٤ من اللوحة ١٧)

كثير الاصلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوى الروايا كان متساوى الاصلاع

وكثير الاصلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوى الاصلاع كانت رواياه متساوية مثنى

(برهان القصية الاولى) ان يقال حيث ان الراوية ا = ب = ح = ... = ى يكون الصلع اب منصفا فى نقطة المماس ى لانه لو وصل نصفا القطرين ع ا و ع ب لكانت الراوية اىع = للراوية بىع لقيامهما وحيث ان الراوية ى اب = للراوية اب ح بالعرص تكون الراوية عاى = للراوية عبى ويلزم من هذا ان تكون الراوية الثالثة ىعا = للراوية ىعب وحيث ان الصلع عى مسترك فى المثلثين عىا و عىب يكون المثلث عىا = للمثلث عىب كما تقرر ذلك فى المطرية السابعة من المقالة الاولى ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان يكون الصلع اى مساويا للصلع ىب وبمثل هذا يبرهن على ان الصلع بك = حك والصلع حل = دل اى يبرهن على ان كل صلع منصف فى نقطه المماس وحيث ان المماس بى = المماس بك يكون اب = بح وبمثل هذا يبرهن على ان جميع الاصلاع متساوية وهو المطلوب

(وبرهان القصية الثانية) ان يقال حيث كان الضلع اب = بح = حد = ... = ى ا وايضا بى = بك ينتج من ذلك ان الصلع اى = حك وحيث ان الراوية اىع = حكع لقيامهما والصلع عى = عك لان كلاهما نصف قطر دائرة بعينها يلرم ان يكون المثلث اعى مساويا للمثلث حعك كما تقرر

(برهان القضية الاولى) ان يقال حيث ان الزاوية ا معيارها

$\frac{\text{المحيط — القوس اب — القوس اد}}{٢}$ والزاوية ب معيارها

$\frac{\text{المحيط — القوس اب — القوس بح}}{٢}$ والقوس بح = القوس

اد تكون الزاوية ا مساوية للزاوية ب وبمثل هذا يبرهن على تساوى الزوايا الاخر

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال حيث كانت الزاوية ا = ب = ح = ... ف يكون الضلع اب = بح = ده و اب

= حد = هو لان الزاوية ا معيارها $\frac{\text{المحيط — القوس اب — القوس اف}}{٢}$

والزاوية ب معيارها $\frac{\text{المحيط — القوس اب — القوس بح}}{٢}$ لكن

حيث كانت الزاوية ا مساوية للزاوية ب بالفرض يلزم ان يكون

$\frac{\text{المحيط — القوس اب — القوس اف}}{٢} = \frac{\text{المحيط — القوس اب — القوس بح}}{٢}$

ويلزم من هذا ان يكون القوس اف = للقوس بح وبمثل هذا يبرهن على ان القوس اب يساوى القوس حد وان القوس بح يساوى القوس ده وهكذا ويلزم من هذا ان تكون الاضلاع متساوية مثنى

(تنبيه)

اعلم ان الضلع الاول = الضلع الثالث و = الخامس و = السابع ويساوى التاسع وهكذا وان الضلع الثانى = الضلع الرابع ويساوى السادس و = الثامن وهكذا فاذا كان عدد اضلاع الشكل فرديا بان كان تسعة مثلا كان الضلع الاول هو الفارق بين الضلع التاسع والضلع

الثانى

ب ح : ب هـ :: $\sqrt{2}$: ١

كما تقرر ذلك فى الطريقة العاشرة من المقالة الثالثة فيعلم من ذلك ان نسبة ضلع المربع المرسوم داخل الدائرة الى نصف القطر كنسبة جذر الاثنين للواحد

(مثالان)

(المثال الاول)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ثلاث اذرع

وطريقة ذلك ان يضرب مقدار نصف قطر الدائرة فى جذر الاثنين فحاصل الضرب يكون المقدار المطلوب ففى هذا المثال يضرب ثلاث اذرع فى جذر الاثنين فيحصل المطلوب

(المثال الثانى)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار نصف قطر الدائرة المرسوم داخلها مربع مقدار ضلعه خمس اذرع

وطريقة ذلك ان يقسم مقدار ضلع المربع المعلوم على جذر الاثنين فخارج القسمة يكون المقدار المطلوب ففى هذا المثال يقسم خمس اذرع على جذر الاثنين فيحصل المطلوب

(الدعوى السادسة العملية)

(شكل ١٥٨ من اللوحه ٦)

اذا كان المطلوب رسم مسدس منتظم داخل دائرة معلومة

وطريقة ذلك ان يقال ليفرض ان المسئلة محلولة وان اب هو احد اضلاع المسدس المنتظم المطلوب ولووصل بهما القطرين اط و ب ط لكان المثلث الحادث اطب متساوى الاضلاع لان الزاوية اطب = $\frac{\text{اربع قوائم}}{٦}$ فاذا جعلت الزاوية القائمة وحدة كانت الزاوية اطب = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

ذلك في المطريه السادسة من المقالة الاولى ويلزم من تساوى هدين الثانيين ان تكون الزاوية ح ا ے = للزاوية ح ح ک وان تكون الزاوية ا التي هي ضعف الزاوية ح ا ے مساوية للزاوية ح التي هي ضعف الزاوية ح ح ک وبمثل هذا يبرهن على ان الزاوية ے = ی وهكذا الى آخره يعني ان الزوايا متساوية مثنى

(تنبيه)

اعلم ان الزاوية الاولى = الثالثة و = الخامسة و = السابعة وهكذا وان الزاوية الثانية = الرابعة و = السادسة و = الثامنة وهكذا فاذا كان عدد اضلاع الشكل فرداً ان كان سبعة مثلا كانت الزاوية الاولى هي الفارقة بين السابعة والثامنة وكانت زوايا الشكل كلها متساوية

(الدعوى الخامسة العملية)

(شكل ١٥٧ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب رسم مربع داخل دائرة معلومة

فطريقة ذلك ان يرسم قطران متعامدان مثل اح و ے ی ويوصل ا ے و ے ح و ح ی و ی ا فيكون الشكل الحادث ا ے ح ی هو المربع المطلوب

لانه يلزم من تساوى الزوايا المركزية اهـ ے و ے هـ ح و ح هـ ی و ی هـ ا ان تكون الاقواس ا ے و ے ح و ح ی و ی ا متساوية ويلزم من هذا ان تكون الاوتار ا ے و ے ح و ح ی و ی ا متساوية ويلزم من كون كل من الزوايا ا و ے و ح و ی محيطية ومرسومة في نصف الدائرة ان تكون كل واحدة منها قائمة فقد ثبت بهذا ان الشكل ا ے ح ی مربع وهو المطلوب

(تنبيه)

حيث ان المثلث ے هـ ح قائم الزاوية ومتساوى الساقين يكون

نصف القطر كنسبة جذر الثلاثة للواحد

(مثالان)

(المثال الاول)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ثلاث اذرع

فطريقة ذلك ان يضرب نصف القطر فى جذر الثلاثة فحاصل الضرب يكون هو المقدار المطلوب ففى هذا المثال تضرب ثلاث اذرع فى جذر الثلاثه فيحصل المطلوب

(المثال الثانى)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار نصف قطر الدائرة المرسوم داخلها مثلث متساوى الاضلاع مقدار ضلعه خمس اذرع

فطريقة ذلك ان يقسم مقدار الضلع المعلوم على جذر الثلاثة فخارج القسمه يكون المقدار المطلوب ففى هذا المثال تقسم خمس اذرع على جذر الثلاثة فيحصل المطلوب

(الدعوى السابعة العملية)

(شكل ١٥٩ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب رسم معشر منتظم داخل دائرة معلومة

فطريقة ذلك ان يقال ليفرض ان المسئلة محلولة وان ا ب هو احد اضلاع المعشر المنتظم المطلوب فلو وصل نصفا القطرين ا ع و ع ب لكان المثلث الحادث ا ع ب متساوى الساقين ويلزم من هذا ان تكون الزاوية ع ا ب مساوية للزاوية ع ب ا وحيث فرض ان ا ب هو احد اضلاع المعشر المنتظم المطلوب يكون القوس ا ب عشر المحيط وتكون الزاوية ا ع ب عشر الاربع قوائم او خمس القائمتين ويلزم من هذا ان يكون مجموع زوايا المثلث ا ع ب قدر الزاوية ا ع ب خمس مرات ويلزم من هذا ان تكون الزاوية ع ا ب ضعف الزاوية ع والزاوية ع ب ا

ويلزم من هذا ان يكون مجموع الزاويتين ابط و باط $= 2 - \frac{2}{3}$ $= \frac{4}{3}$ وحيث ان الزاوية ابط = باط تكون الزاوية ابط $= \frac{2}{3}$ والزاوية باط $= \frac{2}{3}$ فاذن يكون المثلث ابط متساوى الاضلاع لان زواياه الثلاث متساوية فقد ثبت بهذا ان ضلع المسدس المنتظم المرسوم داخل الدائرة مساو لنصف القطر ومن هنا تنتج طريقة رسمية هى ان تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر نصف القطر ويركز فى اى نقطة من المحيط ويوضع الطرف الثانى من البيكار على المحيط فينفصل من المحيط سدسه ثم ينقل البيكار لينفصل السدس الثانى من المحيط وهكذا حتى يرجع الى نقطة الابتداء ثم توصل اوتار تلك الاقواس فيحدث المسدس المنتظم المطلوب

(تنبيهان)

الاول اذا وصلت خطوط مستقيمة بين كل رأسين من رؤس زوايا المسدس المنتظم ابحدهو يكون المثلث الحادث احه متساوى الاضلاع

الثانى حيث كان اب = بح = حط = اط يكون الشكل ابحط المتوازى الاضلاع معينا وقد تقرر فى نتيجة المطرية الرابعة عشر من المقالة الثالثة ان مجموع مربعات الاضلاع الاربعة من اى شكل متوازى الاضلاع مساو مجموع مربعى قطريه فاذن يكون

$$\overline{\text{اح}}^{2} + \overline{\text{بط}}^{2} = \overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} + \overline{\text{حط}}^{2} + \overline{\text{طا}}^{2} = 4\,\overline{\text{اب}}^{2}$$

أو $= 4\,\overline{\text{بط}}^{2}$

فاذا طرح من كل من هاتين المتساويتين $\overline{\text{بط}}^{2}$ يكون

$\overline{\text{اح}}^{2} = 3\,\overline{\text{بط}}^{2}$ ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$\overline{\text{اح}}^{2} : \overline{\text{بط}}^{2} :: 3 : 1$$ أو

$$\text{اح} : \text{بط} :: \sqrt{3} : 1$$

اعنى ان نسبة ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخل الدائرة الى

نصف

فطريقة ذلك ان يقسم المحيط الى عشرة اقواس متساوية ثم توصل اوتار الاقواس التي كل قوس منها يساوى ضعف عشر المحيط فيتشكل الخمس المنتظم المطلوب

(النتيجة الثانية)

اذا كان المطلوب رسم الخمس عشرى المنتظم داخل الدائرة فطريقة ذلك ان نطرح قوس يساوى عشر المحيط من قوس يساوى سدسه فيبقى قوس يساوى جزأ من خمسة عشر من المحيط ثم توخذ فتحه بالبركار بقدر هذا الجزء وتوضع على المحيط مرة بعد اخرى حتى يرجع الى نقطة الابتداء فيتشكل الخمس عشرى المنتظم المطلوب

لان $\frac{١}{٦} - \frac{١}{١٠} = \frac{١ - ١}{٦} = \frac{٤}{٦٠} = \frac{١}{٣٠} = \frac{١}{١٥}$

(تنبيه)

اذا رسم مضلع داخل الدائرة ونصف الاقواس المقابلة لاضلاعه ووصلت اوتار انصاف هذه الاقواس يتشكل مضلع عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الاول فان كان المضلع الاول منتظما كان المضلع الحادث كذلك فلذا يستعمل المربع لانشاء المضلعات المنتظمة التي يكون عدد اضلاعها مضاعفا للعدد ٢ مثل ٨ و ١٦ و ٣٢ و ٦٤ و ١٢٨ الخ

ويستعمل المسدس المنتظم لانشاء المضلعات المنتظمة التي يكون عدد اضلاعها مضاعفا لكل من العددين ٦ و ٢ مثل ١٢ و ٢٤ و ٤٨ و ٩٦ و ١٩٢ الخ

ويستعمل المعشر لانشاء المضلعات التي يكون عدد اضلاعها مضاعفا لكل من العددين ١٠ و ٢ مثل ١٠ و ٤٠ و ٨٠ و ١٦٠ و ٣٢٠ الخ

ويستعمل الخمس عشرى لانشاء المضلعات التي يكون عدد اضلاعها مضاعفا لكل من العددين ١٥ و ٢ مثل ٣٠ و ٦٠ و ١٢٠ و ٢٤٠ و ٤٨٠ الخ

نصف الزاوية ع فلو نصفت الزاوية ع ـ ا بمستقيم مثل ـ م حدث

ام : م ع :: اـ : ـ ع او :: اـ : اع

كما تقرر ذلك فى النظرية السابعة عشر من المقالة الثالثة

وحيث ان الزاوية م ـ ع نصف الزاوية ا ـ ع تكون الزاوية م ـ ع مساوية للزاوية ع ويكون الضلع م ع مساويا للضلع م ـ فلو وضع م ـ بدل م ع فى المتناسبة السابقة لصارت هكذا

ام : م ـ :: اـ : اع

ويلزم من كون المثلث م ع ـ متساوى الساقين ان تكون الزاوية الخارجة عنه وهى ام ـ ضعف الزاوية ع وحيث ان الزاوية م ا ـ ضعف الزاوية ع كذلك تكون الزاوية ام ـ مساوية للزاوية م ا ـ ويلزم من هذا ان يكون المثلث ام ـ متساوى الساقين اى ان يكون م ـ = اـ فلو وضع اـ بدل مساويه م ـ فى المتناسبة السابقة لصارت هكذا

ام : اـ :: اـ : اع

فيعلم من هذه المتناسبة ان ضلع المعشر المنتظم المطلوب وسط متناسب بين نصف القطر والجزء الاصغر ام ومن هنا تنتج طريقة رسمية هى

ان يقسم نصف القطر اع الى قسمين ام و م ع بحيث يكون القسم الاكبر وهو م ع وسطا متناسبا بين نصف القطر اع وجزئه الاصغر ام ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر القسم الاكبر المذكور ويركز فى اى نقطة من محيط الدائرة ويوضع الطرف الثانى من البيكار فى نقطة اخرى من المحيط وينقل البيكار مرة ثانية وثالثة وهكذا حتى يرجع الى نقطة الابتداء فينقسم المحيط الى عشرة اقواس متساوية ثم توصل اوتار تلك الاقواس فيتشكل المعشر المنتظم المطلوب

(النتيجة الاولى)

اذا كان المطلوب رسم مخمس منتظم داخل الدائرة

فطريقة

الدائرة مضلع منتظم مشابه له

فطريقة ذلك ان يوصل من المركز الى رؤس زوايا الشكل المعلوم خطوط مستقيمة مثل ن ر و ن ح و ن ط الخ فهذه الخطوط تقطع محيط الدائرة فى نقط مثل ا و ب و ح الخ فاذا وصلت الاوتار ا ب و ب ح و ح ى الخ حدث مضلع داخل الدائرة مشابه للمضلع المعلوم المرسوم خارجها

أو توصل اوتار بين نقط تماس المحيط باضلاع المضلع الخارج فيحدث ايضا مضلع داخل الدائرة مشابه للمضلع المعلوم المرسوم خارجها

(النتيجه الثانية)

يمكن ان يرسم على الدائرة جميع الاشكال المنتظمة التى علمت كيفية رسمها فى هذه الدائرة وبالعكس

(الدعوى التاسعة المطلوبة)

(شكل ١٦٠ من اللوحة ٦)

كل مضلع منتظم مساحته تساوى حاصل ضرب محيطه فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخله

(برهانها) ان يقال ليكن ر ح ط ى الخ مضلعا منتظما فمساحة المثلث ر ن ح تساوى ر ح $\times \frac{1}{2}$ ن م ومساحة المثلث ن ح ط تساوى ط ح $\times \frac{1}{2}$ ن د وحيث أن ن د $=$ ن م فتكون مساحة مجموع المثلثين هكذا

(ر ح $+$ ح ط) $\times \frac{1}{2}$ ن م فاذا اخذت مساحة جميع المثلثات المشتمل عليها المضلع يشاهد ان مساحة المضلع المذكور تساوى حاصل ضرب محيطه فى $\frac{1}{2}$ ن م اى فى ربع القطر وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم ان الخط ن م الذى هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المضلع هو عين العمود المنزل من المركز على احد اضلاعه

وطالما اعتقد المتقدمون ان هذه المضلعات المنتظمة هي التي يمكن رسمها داخل الدائرة بواسطة طرق الهندسة الاصلية او بها وبواسطة حل المعادلات الجبرية ذوات الدرجة الاولى والثانية الى ان ظهر المعلم غوس المساوى وبرهن في كتابه الذي طبع في ناحية ساقسونيا سنة الف وثمانمائة وواحد من تاريخ الميلاد انه يمكن بواسطة طرق مشابهة للطرق التي ذكرت ان يرسم داخل الدائرة مضلع منتظم عدد اضلاعه سبعة عشر ضلعا بل يمكن ايضا ان يرسم اى مضلع منتظم عدد اضلاعه ٢^ن + ١ بشرط ان يكون ٢^ن + ١ عددا اوليا

(الدعوى الثامنة العملية)

(شكل ١٦٠ من اللوحة ٦)

اذا علم مضلع منتظم مرسوم داخل دائرة وكان المطلوب ان يرسم على هذه الدائرة مضلع مشابه له

فطريقة ذلك ان تنصف الاقواس اب و بج و جد الخ بنقط مثل م و ن و س الخ ثم يمد من تلك النقط خطوط مستقيمة مماسة لمحيط الدائرة مثل رح و حط و طى الخ فيحدث من تلاقي هذه الخطوط مضلع منتظم مشابه للمضلع المعلوم ابجده وتكون كل ثلاث نقط مثل ه و ب و ح على مستقيم واحد لانه حيث كانت اضلاع المضلع المرسوم على الدائرة موازية لنظائرها من المضلع المرسوم داخل الدائرة تكون كل زاوية من زوايا المضلع الخارج مساوية لنظيرتها من المضلع الداخل وحيث كانت زوايا المضلع الداخل متساوية تكون زوايا المضلع الخارج كذلك وقد تقرر في النظرية الرابعة ان كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوي الزوايا كان متساوى الاضلاع فقد ثبت بهذا ان المضلع رحطى الخ منتظم وهو المطلوب

(النتيجة الاولى)

اذا علم مضلع منتظم مرسوم على دائرة وكان المطلوب ان يرسم داخل هذه

الدائرة

المطلوب الثانى :: آب . رح :. آهـ ٠ رط دهـ ـ ط

(الدعوى الحادية عشر الزائدة)

(شكل ١٦٢ الثانى)

ـاط اصغر من كل خط محيط به

ـد الخط المحنى او المنكسر او المركب منهما الذى لا يقطعه

طتين

قال ليكن ا ب ح د خطا منكسرا محدبا و هـ و ر م خطا

المحدب ا ب ح د فلو مدت الاضلاع ا ب و ب ح و ح د

ة واحدة حتى قطعت الخط المحيط لحدثت هذه المتباينات

+ ب ح > ا ل + ل هـ + هـ ح

+ ح ى > ب ح + ح و + و ى

+ د ك > ح ى + ى ر + ر ك

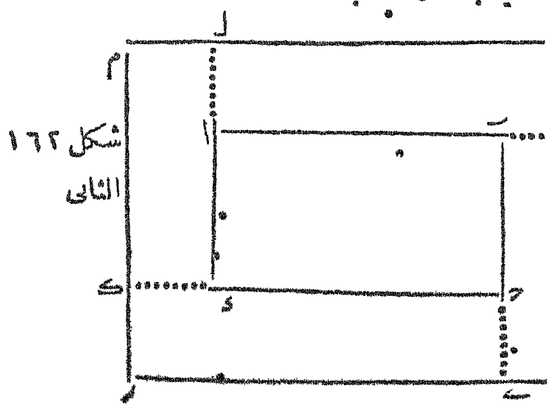
+ ا ل > د ك + ك م + م ل

المتباينات طرفا لطرف وحذفت الاجزاء المشتركه من كل من

+ ح د + د ا > هـ و + و ر + ر م + م هـ

على ان كل خط محدب كائنا ما كان عدد اضلاعه فهو دائما

محيط به وهو المطلوب



شكل ١٦٢ الثانى

(الدعوى العاشرة النظرية)

(شكل ١٦١ من اللوحة ٦)

نسبة محيطات المضلعات المنتظمة المتحدة فى عدد الاضلاع الى بعضها كنسبة انصاف اقطار الدوائر المرسومة داخلها وكنسبة انصاف اقطار الدوائر المرسومة خارجها ونسبة سطوح المضلعات المذكورة الى بعضها كنسبة مربعات انصاف الاقطار المذكورة

(برهان القضية الاولى) ان يقال ليكن اب احد اضلاع مضلع منتظم مركزه ه فيكون اه هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ويكون العمود هد النازل على اب هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله وليكن ايضا رح احد اضلاع المضلع المنتظم الآخر والنقطة ط مركزه فيكون طر هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ويكون العمود طى النازل على رح هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله حيث ان الزاوية ا نصف زاوية المضلع الاول والزاوية ر نصف زاوية المضلع الثانى تكون الزاوية ا مساوية للزاوية ر وايضا تكون الزاوية ب مساوية للزاوية ح ويلزم من هذا ان يكون المثلث اب ه مشابها للمثلث رح ط وكذا يلزم ان يكون المثلث اده مشابها للمثلث رى ط ويلزم من هذا ان يكون

اب : رح :: اه . رط :: ده : ى ط

وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال حيث ان

اب : رح :: اه : رط :: ده : ى ط

وان المقادير المتناسبة مربعاتها متناسبة كما تقرر فى علم الحساب فيكون

$\overline{اب}^2 : \overline{رح}^2 :: \overline{اه}^2 : \overline{رط}^2 :: \overline{ده}^2 : \overline{ىط}^2$

وحيث ان نسبة المضلعين المذكورين الى بعضهما كنسبة مربعى ضلعين متناظرين يكون

(تنبيه)

يمكن ان يرسم جزء من مضلع منتظم داخل اكبر القطعين ودر و ط ح ج
وان يرسم جزء آخر مشابه له على القطع الاصغر بحيث تكون اطراف المضلعين
محصورة بين المحيطين ويكفي لعمل ذلك ان يقسم القوس ودر الى قسمين
متساويين ثم الى اربعة اقسام متساوية ثم الى ثمانية اقسام متساوية وهكذا
حتى يحصل جزء اصغر من القوس دهـ
ويطلق قسم المضلع المنتظم هنا على الشكل المحدود بجملة اوتار متساوية
مرسومة في القوس ود من احد طرفيه الى الآخر وهذا القسم وان
وجدت فيه خواص المضلع المنتظم وهي تساوي الاضلاع والزوايا وامكان
رسمه في الدائرة ورسم الدائرة فيه الا انه لا يكون جزأ من مضلع منتظم الا اذا
كان القوس الموتر باحد اضلاعه جزأ تاما داخلا في المحيط اعني الا اذا اشتمل
محيط الدائرة على قوسه مرارا صحيحة بدون باق

(الدعوى الثالثة عشر الطرية)

نسبة محيطي الدائرتين الى بعضهما كنسبة نصفي قطريهما
ونسبة الدائرتين الى بعضهما كنسبة مربعي نصفي قطريهما
(برهانها) ان يقال لو رسم في الدائرتين مضلعان منتظمان متشابهان للزم
ان تكون نسبة محيطي هذين المضلعين الى بعضهما كنسبة نصفي قطري
الدائرتين المرسومتين على المضلعين المذكورين وان تكون نسبة سطحي هذين
المضلعين الى بعضهما كنسبة مربعي نصفي القطرين المذكورين كما تقرر ذلك
في المطربه العاشرة وحيث انه يمكن اعتبار الدائرة مضلعا منتظما لا حصر
لعدد اضلاعه ينتج من ذلك ان نسبة محيطي الدائرتين الى بعضهما كنسبة
نصفي قطريهما وان نسبة الدائرتين الى بعضهما كنسبة مربعي نصفي
قطريهما وهو المطلوب

(تعاريف)

الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطوع المتشابهة هي التي تقابل

(الدعوى الثانية عشر المطرية)

(شكل ١٦٤ من اللوحة ٧)

كل دائرتين متحدتى المركز يمكن دائما ان يرسم داخل كبراهما مضلع منتظم اضلاعه لا تقطع محيط الصغرى وان يرسم على محيط الصغرى مضلع منتظم اضلاعه لا تقطع محيط الكبرى

(برهان القضية الاولى) ان يقال ليكن ح ا نصف قطر الدائرة الصغرى و ح ب نصف قطر الكبرى ولو رسم مستقيم مثل ء ه مماس لمحيط الصغرى فى النقطة ا ومدّ على استقامته حتى انتهى الى محيط الكبرى فى نقطتين مثل ء و ه ورسم داخل الدائرة الكبرى مضلع منتظم من المضلعات المنتظمة الممكن رسمها داخل الدائرة بواسطة العمليات المتقدّمة ونصفت الاقواس الموترة باضلاعه ووصلت اوتار انصاف هذه الاقواس لتشكل مضلع منتظم عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الاول ولو دووم على تنصيف هذه الاقواس لتحصل قوس مثل م ب ق اصغر من القوس ء ب ه ولو فرض ان النقطة ب هى وسط القوس م ب ق لظهر ان الوتر م ق ابعد من المركز من الوتر ء ه وان المضلع المنتظم الذى احد اضلاعه م ق لا يقطع محيط الدائرة التى نصف قطرها ح ا وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال لو وصل ح م و ح ق اللذان يقطعان المماس ء ه فى ك و ل لكان ك ل هو احد اضلاع المضلع المنتظم المرسوم على الدائرة الصغرى المشابه للمضلع المرسوم داخل الدائرة الكبرى الذى ضلعه م ق

وحيث ان الخط ح ك اصغر من الخط ح م يظهر ان المضلع المرسوم على الدائرة الصغرى الذى ضلعه ك ل لا يقطع محيط الدائرة الكبرى فيعلم من ذلك انه يمكن بواسطة العمل المتقدم ان يرسم مضلع منتظم داخل الدائرة الكبرى وان يرسم مضلع مشابه له على محيط الدائرة الصغرى بحيث تكون اضلاعهما محصورة بين محيطى الدائرتين

(تنبيه)

الطريقة التاسعة فاذا كانت اضلاع هذا المضلع صغيرة جدا يتحد محيطه محيط الدائرة وحينئذ تكون مساحة الدائرة مساوية له اعنى اى لحاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها وهو المطلوب

(النتيجة الاولى)

(شكل ١٦٨ من اللوحة ٧)

كل قطع دائرة مساحته تساوى حاصل ضرب قوسه فى ربع قطره لان نسبة القطع ا ب ح الى الدائرة الكاملة كنسبة القوس ام ب الى المحيط الكامل ا ب د كما تقرر ذلك فى المقالة الثانية أو كنسبة القوس ام ب × $\frac{1}{2}$ ح ا الى المحيط ا ب د × $\frac{1}{2}$ ح ا وحيث ان مساحة الدائرة = المحيط ا ب د × $\frac{1}{2}$ ح ا ينتج ان مساحة القطع ا ب ح = ام ب × $\frac{1}{2}$ ح ا وهو المطلوب

(النتيجة الثانيه)

اذا رمزنا بالرمزين م و مَ لمحيطى دائرتين مرموز لقطر احدهما بالرمز ق والقطر الآخر بالرمز قَ حدث

م : مَ :: ق : قَ أو

م : ق :: مَ : قَ

اعنى ان النسبة بين اى محيط دائرة وقطرها واحدة فى سائر الدوائر والعادة ان يرمز بالحرف ط لمحيط الدائرة التى قطرها واحد فعلى هذا يكون

م . ق :: ط : ١ ومن هذه المناسبة ينتج آن

م = ط × ق = ط × ٢ نق = ٢ ط نق

(ونق رمز لنصف القطر)

وحيث ان كل دائرة مساحتها تساوى حاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها

الزوايا المركزية المتساوية

(الدعوى الرابعة عشر النظرية)

(شكل ١٦٦ من اللوحة ٧)

نسبة القوسين المتشابهين الى بعضهما كنسبة نصفى قطريهما
ونسبة القطعين المتشابهين الى بعضهما كنسبة مربعى نصفى قطريهما
(برهان القضيه الاولى) ان يقال لتكن الزاوية ح مساوية للزاوية ط
فيكون

القوس ب ا : المحيط اح :: الزاوية ح : ٤ قوائم

وكذا يكون

القوس ده : المحيط طد :: الزاوية ط : ٤ قوائم

ويلزم من هذا ان يكون

القوس ب ا : القوس ده :: المحيط اح : المحيط طد

وحيث ان المحيط اح : المحيط طد :: اح : طد يكون

القوس ب ا : القوس ده :: اح : طد وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال حيث ان

القطع اح ب : الدائرة اح :: الزاوية ح : ٤ قوائم و

القطع دطه : الدائرة دط :: الزاوية ط : ٤ قوائم يكون

القطع اح ب : القطع دطه :: الدائرة اح : الدائرة دط

وحيث ان الدائرة اح : الدائرة دط :: $\overline{اح}^2$: $\overline{دط}^2$ يكون

القطع اح ب : القطع دطه :: $\overline{اح}^2$: $\overline{دط}^2$ وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة عشر النظرية)

كل دائرة مساحتها تساوى حاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها
(برهانها) ان يقال لو رسم على الدائرة مضلع منتظم لكانت مساحته مساوية
لحاصل ضرب محيطه فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخله كما تقرر ذلك فى

النظرية

٣٫١٤١٥٩٢٦٥٣ وقد دوا هذا الكسر الى
عشرين بل الى الخانة المائة والاربعين وهذه الكسور التى
الدرجة حصل بها التقريب الكافى كما لا يخفى وكثيرا
فى الحسابات باعتبار ط = ٣٫١٤١٥٩٢٦ وهذا
لنسبة الحقيقية باقل من جزء من عشرة ملايين فينتج من هذا
$\frac{٢٢}{٧}$ يزيد عن النسبة الحقيقية باقل من $\frac{١}{٧٩}$

* (الدعوى السادسة عشر العملية) *

(شكل ١٦٩ من اللوحة ٧)

مسطحان متشابهان احدهما مرسوم داخل دائرة والآخر
كان المطلوب ايجاد سطح المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة
لاعه ضعف عدد اضلاع الشكل الداخل المعلوم ثم ايجاد
طح المرسوم على الدائرة الذى عدد اضلاعه ضعف عدد
الخارج المعلوم وطريقة ذلك ان يقال
حد اضلاع المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة وهو
حد اضلاع المضلع المنتظم المشابه له المرسوم على الدائرة ولتكن
ن مركز تلك الدائرة فلو وصل الوتر ام ورسم المماسات ال
ن الوتر ام هو احد اضلاع المضلع المنتظم المرسوم داخل
د اضلاعه ضعف عدد اضلاع المضلع المعلوم المرسوم داخل
م فالخط لك الذى هو ضعف الخط لم يكون هو احد
المرسوم على الدائرة المشابه للمضلع الداخل الذى ضلعه ام
علم انه يمكن اجراء العمل كما ذكر فى الزاوية ادم على سائر
ى تساويها
ب ا لمساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة الذى ضلعه اب
لمساحة المضلع المشابه له المرسوم على الدائرة

لمساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة الذى ضلعه ام

ينتج من ذلك ان الدائرة التي نصف قطرها نق

مساحتها = ٢ ط نق × $\frac{١}{٢}$ نق = ط نق^{٢}

(تنبيه)

اعلم ان مسئلة ايجاد خط مستقيم يساوى محيط دائرة معلومة تؤل الى ايجاد مقدار النسبة المرموز لها بالحرف ط اى الى ايجاد طول محيط الدائرة التي قطرها واحد

وكذلك مسئلة ايجاد مربع مكافىء لدائرة معلومة تؤل الى ايجاد مربع مكافىء مستطيلا قاعدته تساوى محيط الدائرة المعلومة وارتفاعه يساوى ربع قطرها

والى الآن لم يمكن ايجاد النسبة الحقيقية بين محيط الدائرة وقطرها وانما الذى امكن ايجاد نسبة تقريبية فقط ولكن بواسطة الكسور المتسلسلة وحساب المتواليات صارت تلك النسبة فى اقصى درجة من التقريب بحيث لو وجدت النسبة الحقيقية فلا ثمرة فيها زيادة عما ذكر

وقبل ان يعلم حساب المتواليات على وجه الاتقان كان المهندسون المتقدمون يبذلون الوسع ما استطاعوا فى حل هذه المسئلة واما الآن فقد صارت فى حيز الاهمال لكن لاجل تمرين المبتدئين وتوسيع مباحث افكارهم احد من المهندسين المتقدمين مهندس يسمى ارشميدس وبين ان النسبة بين محيط الدائرة وقطرها محصورة بين $\frac{١٠}{٧٠}$ و ٣ و $\frac{١٠}{٧١}$ و ٣

أو بين $\frac{٧١}{٤٩٧}$ و ٣ و $\frac{٧٠}{٤٩٧}$ و ٣ فعلى هذا يكون $\frac{١}{٧}$ و ٣

أو $\frac{٢٢}{٧}$ مقدارا مقربا من النسبة المذكورة زائدا عنها باقل من $\frac{١}{٤١٧}$

ولكونه اسهل من غيره كان هو الجارى فى الاستعمال ومن المتقدمين مهندس يسمى ميتيوس استخرج مقدارا لهذه النسبة اشد قربا مما ذكر وهو $\frac{٣٥٥}{١١٣}$

وبالجملة فقد استخرج بمعرفة المتأخرين من المهندسين مقدار ط بواسطة الكسور الاعشارية وقدموها الى درجة التقريب ما استطاعوا حتى وصلوا الى هذه الاعداد

مشتركه فى ح وارتفاعا مشتركا يكون

حلم : حله :: لم : له

ويلزم من كون الخط لح منصفا للزاوية هحم ان يكون

لم : له :: حم : حه كما تقرر ذلك فى النظرية السابعة عشر من المقالة الثالثة وحيث ان حم = حا يكون

حم : حه :: حا : حه

ويلزم من كون الخط اد موازيا للخط هم ان يكون

حا : حه :: حد : حم وقد سبق ان

حد : حم :: ١ : أ ينتج ان

حلم : حله :: ١ : أ ومن هذه المناسبة ينتج أن

حلم : حلم + حله :: ١ : ١ + أ

وحيث ان حلم + حله = حهم يكون

حلم : حهم :: ١ : ١ + أ أو

٢ حلم : حهم :: ٢ : ١ + أ

وحيث ان ٢ حلم = حلك يكون

حلك : حهم :: ٢ : ١ + أ.

وحيث ان حلك : حهم :: الشكل تَ : الشكل ت يكون

تَ : ت :: ٢ : ١ + أ

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$$تَ = \frac{٢ \times ت}{١ + أ}$$ وحيث ان أ = $\sqrt{١ \times ت}$ يكون

$$تَ = \frac{٢ \times ت}{١ + \sqrt{١ \times ت}}$$ وهو المطلوب

وبالحرف ب لمساحة المضلع المشابه له المرسوم على الدائرة الذى ضلعه لـ ك

ولايجاد مقدارى أ و ب يقال

اولا حيث ان للمثلثين احد و احم رأسا مشتركة فى ا وارتفاعا واحدا يكون

اد : احم :: دى : دم وايضا

ادى : احم :: الشكل ا : الشكل أ فينتج ان

ا : أ :: دى : دم

وايضا حيث ان للمثلثين احم و هدم رأسا مشتركة فى م وارتفاعا واحدا يكون

احم : هدم :: دا : دهـ

وايضا احم : هدم :: الشكل أ : الشكل ب فينتج ان

أ : ب :: دا : دهـ

ويلزم من كون الخط اى موازيا للخط هم ان يكون

دا : دهـ :: دى : دم

وحيث ان دى . دم :. ا : أ يكون

أ : ب :: ا : أ فينتج ان

أ = $\sqrt{١ \times ب}$

اعنى ان مساحة الشكل أ وسط متناسب بين مساحتى الشكلين المعلومين وهو المطلوب

وثانيا لايجاد مقدار ب يقال حيث ان للمثلثين حلم و حلهـ رأسا مشتركة

وحيث علمت مساحة السادس عشرى المسطح المرسوم داخل الدائرة ومساحة السادس عشرى المسطح المرسوم على الدائرة توجد بواسطتهما مساحة المضلع المسطح الذى عدد اضلاعه ٣٢ فاذا دووم على اجراء العمل بهذه الكيفية توجد مساحة المضلع المسطح الذى عدد اضلاعه ٦٤ ثم مساحة المضلع المسطح الذى عدد اضلاعه ١٢٨ ثم مساحه المضلع المسطح الذى عدد اضلاعه ٢٥٦ وهكذا حتى لا يبقى الا فرق يسير جدا بين مساحة الشكل المرسوم داخل الدائرة ومساحة الشكل المرسوم خارجها

وحيث ان الدائرة محصورة بين الشكلين والفرق بين مساحتى هذين الشكلين يسير جدا لا يساوى جزأ من عشرة ملايين يعلم من ذلك انه يمكن ان تعتبر مساحة احدهذين الشكلين مساوية لمساحة الدائرة وان مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها .

وقد رتبت الحالات المتوافقة فى جدول هاصورته

(الدعوى السابعه عشر العمليه)

اذا كان المطلوب ايجاد نسبة تقريبية بين محيط الدائرة وقطرها فطريقة ذلك ان يقال لو فرض ان نصف قطرها = ١ لكان ضلع المربع المرسوم داخلها = $\sqrt{٢}$ كما تقرر ذلك في تنبيه الدعوى الخامسه العمليه وحيث ان ضلع المربع المرسوم على الدائرة مساو لقطرها يكون ضلع المربع المذكور مساويا للعدد ٢ ويلزم من هذا ان تكون مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة مساوية للعدد ٢ ومساحة المربع المرسوم عليها = ٤ فاذا رمز بالحرف ا لمساحة المربع المرسوم داخل الدائرة وبالحرف ب لمساحة المربع المرسوم عليها يكون ا = ٢ و ب = ٤

ويقتضى ما ذكر في الدعوى العملية المتقدمة تكون مساحة المثمن المنتظم المرسوم داخل الدائرة المرموز له بالحرف اَ هكذا

$$\text{اَ} = \sqrt{\text{ا}\times\text{ب}} = \sqrt{٢\times٤} = \sqrt{٨} = ٢{,}٨٢٨٤٢٧١$$

وتكون مساحة المثمن المنتظم المرسوم على الدائرة المرموز له بالحرف بَ هكذا

$$\text{بَ} = \frac{٢\text{ا}\times\text{ب}}{\text{ا}+\sqrt{\text{ا}\times\text{ب}}} = \frac{٢\times٢\times٤}{٢+\sqrt{٨}} = \frac{١٦}{٢+\sqrt{٨}} = ٣{,}٣١٣٧٠٨٥$$

وحيث علمت مساحة المثمن المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومساحة المثمن المنتظم المرسوم على الدائرة توجد بواسطتهما مساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم على الدائرة ويلزم لذلك ان يفرض جديدا ان

$$\text{ا} = ٢{,}٨٢٨٤٢٧١ \quad \text{و} \quad \text{ب} = ٣{,}٣١٣٧٠٨٥$$

فينتج ان

$$\text{اَ} = \sqrt{\text{ا}\times\text{ب}} = ٣{,}٠٦١٤٦٧٤$$

و

$$\text{بَ} = \frac{٢\text{ا}\times\text{ب}}{\text{ا}+\text{اَ}} = ٣{,}١٨٢٥٩٧٩$$

وحيث

(امثلہ)

(المثال الاول)

دخط مستقيم يكافى محيط دائرة قطرها معين
قطر الدائرة المعلومة الى سدة اقسام متساوية ثم ر م
د عليه بعد بقدر ربع القطر المعلوم ثم يكرر عدا العدد
صل المطلوب بالحليل ں التقرب

(المثال الثانى)

ادمربع يكافى دائرة معلومة
عن الوسط المتناسب بين مستقيمين احدهما يساوى
ة والاخر يساوى ربع قطرها فالوسط المتناسب
ربع المطلوب
اسب بين مستقيمين احدهما يساوى نصف محيط
حر يساوى نصف قطرها فالوسط المتناسب الذى ينتج
ضلع المربع المطلوب
ناسب بين مستقيمين احدهما يساوى ربع محيط الدائرة
اوى قطرها فالوسط المتناسب الذى ينتج من هذه العملية
ثب

(المثال الثالث)

د دائرة تكافى مربعا معلوما
بالحرف م لضلع المربع المعلوم وبالحرف ى للدائرة
لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

= ط نق٢ = ٢٢/٧ × نق٢ فينتج ان

: ٢٢/٧ = ٧م٢/٢٢ = ٧م × م/٢٢ اى

: نق : م/٢٢

عدد الاضلاع	مساحة المضلع الداخل	مساحة المضلع الخارج
٤	٢٫٠٠٠٠٠٠٠	٤٫٠٠٠٠٠٠٠
٨	٢٫٨٢٨٤٢٧١	٣٫٣١٣٧٠٨٥
١٦	٣٫ ٦١٤٦٧٤	٣٫١٨٢٥٩٧٩
٣٢	٣٫١٢١٤٤٥١	٣٫١٥١٧٢٤٩
٦٤	٣٫١٣٦٥٤٨٥	٣٫١٤٤١١٨٤
١٢٨	٣٫١٤٠٣٣١١	٣٫١٤٢٢٢٣٦
٢٥٦	٣٫١٤١٢٧٧٢	٣٫١٤١٧٥٠٤
٥١٢	٣٫١٤١٥١٣٨	٣٫١٤١٦٣٢١
١٠٢٤	٣٫١٤١٥٧٢٩	٣٫١٤١٦٠٢٥
٢٠٤٨	٣٫١٤١٥٨٧٧	٣٫١٤١٥٩٥١
٤٠٩٦	٣٫١٤١٥٩١٤	٣٫١٤١٥٩٣٣
٨١٩٢	٣٫١٤١٥٩٢٣	٣٫١٤١٥٩٢٨
١٦٣٨٤	٣٫١٤١٥٩٢٥	٣٫١٤١٥٩٢٧
٣٢٧٦٨	٣٫١٤١٥٩٢٦	٣٫١٤١٥٩٢٦

فيعلم من ذلك ان سطح الدائرة = ٣٫١٤١٥٩٢٦ وحيث انه صار
تقديم الكسر الاعشارى الى سابع خانة وترك البواقى حسبت الكسور زيادة
ترقيم خانة ليكون الناتج من الحساب فى غاية من التقريب
وحيث ان مساحة الدائرة مساوية لحاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها ينتج
من ذلك انه اذا كان نصف قطرها واحدا يكون نصف المحيط
= ٣٫١٤١٥٩٢٦ وان كان قطرها واحدا يكون المحيط
= ٣٫١٤١٥٩٢٦ فتبين ان مقدار ط الذى هو النسبة التقريبية
بين محيط الدائرة وقطرها = ٣٫١٤١٥٩٢٦ وهو المطلوب

(امثلة)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار قطر الدائرة التي مساحتها تسعة وثلاثين ذراعا وسبعاوهي الذراع المربع وطريقة ذلك ان يرمز بالحرف ق للقطر المطلوب وبالحرف نق لنصفه وبالحرف د للمساحة المعلومة وعلى منطوق المثال يكون

$$د = ط\,نق^{٢} = ط \times \frac{ق^{٢}}{٤} = \frac{ط}{٤} \times ق^{٢} = \left(\frac{٢٢}{٧} \div ٤\right) \times ق^{٢}$$

أو $د = \frac{١١}{١٤} \times ق^{٢}$ ومن هذه المعادلة ينتج ان

$$ق^{٢} = د \div \frac{١١}{١٤} = \frac{١٤د}{١١} = \frac{١٤}{١١}\left(\frac{٢}{٧} + ٣٩\right)$$ وان

$$ق = \sqrt{\frac{١٤}{١١}\left(\frac{٢}{٧} + ٣٩\right)}$$

ويعلم من ذلك انه لايجاد قطر الدائرة بعد معرفة مساحتها يلزم ان تضرب المساحة المعلومة في اربعة عشر ويقسم حاصل الضرب على احدى عشر ثم يؤخذ جذر الناتج فيكون المتحصل من الجذر مساويا لمقدار القطر المطلوب

المثال الثاني

ان يكون المطلوب معرفة مقدار طول القوس الذي مقداره ٤٥ درجه و ٢٠ دقيقة بفرض ان نصف قطره ٤ و ٥ امتار وطريقة ذلك ان يبحث عن النسبة الكائنة بين هذا القوس وربع المحيط ثم تضرب هذه النسبة في طول ربع المحيط فينتج المطلوب

وصورة العملية هكذا

$$٤٥^{\circ} + ٢٠' = ٤٥ \times ٦٠' + ٢٠' = ٢٧٠٠' + ٢٠' = ٢٧٢٠'$$

وربع المحيط $= ٩٠ \times ٦٠' = ٥٤٠٠'$

والنسبة الكائنة بين $١٧٢٠'$ و $٥٤٠٠' = \frac{٢٧٢٠}{٥٤٠٠} = \frac{١٨}{١٣٥}$ من ربع المحيط وطول ربع المحيط $= \frac{ط}{٢} \times ٤,٥$ فاذن يكون طول

ويعلم من هذه المتناسبة ان نصف قطر الدائرة المطلوبة وسط متناسب بين مستقيمين احدهما يساوى سبعة امثال ضلع المربع المعلوم والآخر يساوى جزأ من اثنين وعشرين جزءا من ضلع المربع المذكور

(المثال الرابع)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار محيط الدائرة التى قطرها خمس اذرع فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف م للمحيط المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$م = ط \times ٥ = \frac{٢٢}{٧} \times ٥ = \frac{١١٠}{٧} = \frac{٥}{٧} + ١٥$$

اى ان المحيط المطلوب يساوى خمسة عشر ذراعا وخمسة اسباع الذراع

(المثال الخامس)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار قطر الدائرة التى محيطها سبع واربعون ذراعا وسبع ذراع

فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف ق للقطر المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$\frac{١}{٧} + ٤٧ = ط \times ق = \frac{٢٢}{٧} \times ق$ ومن هذه المعادلة ينتج ان

$$ق = (\frac{١}{٧} + ٤٧) : \frac{٢٢}{٧} = \frac{٧(\frac{١}{٧} + ٤٧)}{٢٢} = ١٥$$

اى ان القطر المطلوب يساوى خمسة عشر ذراعا

(المثال السادس)

ان يكون المطلوب معرفة مقدار مساحة الدائرة التى قطرها خمس اذرع فطريقة ذلك ان يرمز بالحرف ى لمساحة الدائرة المطلوبة فعلى منطوق المثال يكون

$$ى = ط\ نق^{٢} = \frac{ط}{٤} \times ق^{٢} = \frac{٢٢}{٤\times٧} \times ٥^{٢}$$

$$\text{أو}\quad ى = \frac{١١}{١٤} \times ٢٥ = \frac{٢٧٥}{١٤} = \frac{٩}{١٤} + ١٩$$

اى ان المساحة المطلوبة تساوى تسعة عشر ذراعا مربعا وتسعة اجزاء من اربعة عشر جزأ من الذراع المربع

(المثال السابع)

ان

وبالرمز مً للمحيط الآخر وبالرمز نقً لنصف قطره وبالحرف م للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

م = مَ + مً وحيث أن م = ٢ط نق و مَ = ٢ ط نقَ
و مً = ٢ ط نقً يكون

٢ ط نق = ٢ ط نقَ + ٢ ط نقً = ٢ ط (نقَ + نقً)

ينتج ان نق = نقَ + نقً

اعنى ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوى مجموع نصفى قطرى المحيطين المعلومين

المثال الثانى

ان يكون المطلوب ايجاد محيط دائرة يساوى فاضل محيطين معلومين فطريقه ذلك ان يبحث عن فاصل نصفى قطرى المحيطين المعلومين فينتج نصف قطر المحيط المطلوب

المثال الثالث

ان يكون المطلوب ايجاد محيط دائرة يساوى مجموع جملة محيطات معلومة فطريقه ذلك ان يبحث عن مستقيم يساوى مجموع انصاف اقطار المحيطات المعلومة فيكون هو نصف قطر المحيط المطلوب

المثال الرابع

ان يكون المطلوب ايجاد محيط دائرة يساوى الفاصل بين جملة محيطات معلومة وجملة محيطات كذلك فطريقه ذلك ان يبحث عن محيط يساوى جملة المحيطات الاول ثم يبحث عن محيط آخر يساوى جملة المحيطات الآخر ثم عن محيط يساوى فاصل هذين المحيطين فيكون هو المحيط المطلوب

امثلة فى جمع الدوائر وطرحها

المثال الاول

ان يكون المطلوب ايجاد دائرة تساوى مجموع جملة دوائر معلومة فطريقة ذلك ان يرمز بالرمز د لاحدى الدوائر المعلومة وبالرمز نق لنصف

القوس المطلوب هكذا

س = ٦١/١٥ × ط/٢ × ر ن = ٢/١٢٥ × ط × ٤٫٥

وصورة العملية بواسطة اللوغارتم هكذا

لوغا ٢٤ = ١و٣٨٠٢١١٢

لوغا ط = ٠و٤٩٧١٤٩٩

لوغا ٤و٥ = ٠و٦٥٣٢١٢٥

مكمل لوغا ١٢٥ = ١و٩٠٣٠٩٠٠

لوغا س = ٠و٤٣٣٥٦٣٦

فيكون س = ٢و٧٢٦ امتار

والمتروك في هذا المقدار اقل بكثير من عشرة الاف من المتر اي اقل من عشر المليمتر

المثال التاسع

ان يكون المطلوب ايجاد مساحة قطع دائرة نصف قطرها اثنى عشر مترا وقوسه يساوي ٦٠ درجة وطريق ذلك ان يبحث عن طول هذا القوس ثم يضرب الناتج في ربع القطر فينتج المطلوب

وصورة العملية هكذا

القوس : ٢ ط نق :: ٦٠° : ٣٦٠°

$$\text{القوس} = \frac{\text{٢ ط نق} \times \text{٦٠}}{\text{٣٦٠}} = \frac{\text{ط نق}}{\text{٣}} = \frac{\text{ط} \times \text{١٢}}{\text{٣}} = \text{٤ ط}$$

والقطع = ٤ ط × ٦ = ٢٤ ط = ٧٥٫٣٩٦٠ مترا مربعا وهو المطلوب

امثلة في جمع محيطات الدوائر وطرحها

المثال الاول

ان يكون المطلوب ايجاد محيط دائرة يساوي مجموع محيطين معلومين فطريقة ذلك ان يرمز بالرمز مَ لاحد المحيطين المعلومين وبالرمز نقَ لنصف قطره وبالرمز

[illegible]

المثال الثالث

ان يكون المطلوب ايجاد الفاضل بين جملة دوائر معلومة وجملة دوائر كذلك فطريقة ذلك ان يبحث عن دائرة تساوي جملة الدوائر الاول ثم يبحث ايضا عن دائرة تساوي جملة الدوائر الاخر ثم عن دائرة تساوي فاصل هاتين الدائرتين فتكون هي الدائرة المطلوبة

[illegible] في ضرب محيطات الدوائر وتقسيمها

المثال الاول

اذا علم محيط شكل م وكان المطلوب ايجاد ضعفه فطريقة ذلك ان نرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم م وبالرمز مَ للمحيط المطلوب وبالرمز نقَ لنصف قطره فعلى مقتضى المثال يكون مَ = ٢ م

وحيث ان م = ٢ ط نق و مَ = ٢ ط نقَ

يكون ٢ ط نقَ = ٢ × ٢ ط نق

ومن هذه المتساوية ينتج ان نقَ = ٢ نق

اي ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوي ضعف نصف قطر المحيط المعلوم

المثال الثاني

اذا علم محيط شكل م وكان المطلوب ايجاد محيط يكون ثلاثة امثاله فطريقة ذلك ان نرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز مَ للمحيط المطلوب وبالرمز نقَ لنصف قطره فعلى مقتضى المثال يكون

مَ = ٣ م وحيث ان م = ٢ ط نق

و مَ = ٢ ط نقَ يكون ٢ ط نقَ = ٣ × ٢ ط نق

ومن هذه المتساوية ينتج ان نقَ = ٣ نق

اي ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوي ثلاثة امثال نصف قطر المحيط المعلوم

المثال الثالث

قطرها وبالرمز $د_٢$ للدائرة الثانية المعلومة كذلك وبالرمز $نق_٢$ لنصف قطرها وبالرمز $د_٣$ للدائرة الثالثة وبالرمز $نق_٣$ لنصف قطرها وبالرمز د للدائرة المطلوبة وبالرمز نق لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$د = د_١ + د_٢ + د_٣ + \cdots \text{الخ}$$

وحيث ان

$$د_١ = ط\,نق_١^٢ \quad و \quad د_٢ = ط\,نق_٢^٢ \quad و \quad د_٣ = ط\,نق_٣^٢$$

يكون $ط\,نق^٢ = ط\,نق_١^٢ + ط\,نق_٢^٢ + ط\,نق_٣^٢ = ط(نق_١^٢ + نق_٢^٢ + نق_٣^٢)$

فينتج ان $نق^٢ = نق_١^٢ + نق_٢^٢ + نق_٣^٢$

اعنى ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى مجموع مربعات انصاف اقطار الدوائر المعلومة

المثال الثانى

ان يكون المطلوب ايجاد دائرة تساوى فاصل دائرتين معلومتين فطريقة ذلك ان يرمز بالرمز $د_١$ للدائرة الكبرى وبالرمز $نق_١$ لنصف قطرها وبالرمز $د_٢$ للدائرة الصغرى وبالرمز $نق_٢$ لنصف قطرها وبالرمز د للدائرة المطلوبة وبالرمز نق لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$د = د_١ - د_٢ \quad \text{وحيث ان} \quad د_١ = ط\,نق_١^٢$$

و $د_٢ = ط\,نق_٢^٢$ يكون

$$ط\,نق^٢ = ط\,نق_١^٢ - ط\,نق_٢^٢ = ط\,(نق_١^٢ - نق_٢^٢)$$

فينتج ان $نق^٢ = نق_١^٢ - نق_٢^٢$

اعنى ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى فاضل مربعى نصفى قطرى الدائرتين

المثال يكون مَ : م :: ٣ : ٥
وحيث ان مَ : م :: نقَ : نق
يكون نقَ : نق :: ٣ : ٥
ومن هذه المناسبة ينتج ان نقَ = نق × ٣/٥
اعني ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوي ثلاثة اخماس نصف قطر المحيط المعلوم

امثلة في ضرب الدوائر وتقسيمها

المثال الاول

اذا علمت دائرة مثل د وكان المطلوب ايجاد دائرة ضعفها فطريقة ذلك ان يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز دَ للدائرة المطلوبة وبالرمز نقَ لنصف قطرها فاعلى منطوق المثال يكون
دَ = ٢ د وحيث ان د = ط نق٢ و دَ = ط نقَ٢ يكون
ط نقَ٢ = ٢ ط نق٢ ومن هذه المساواة ينتج ان نقَ٢ = ٢ نق٢
اعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة ضعف مربع نصف قطر الدائرة المعلومة

المثال الثاني

اذا علمت دائرة مثل د وكان المطلوب ايجاد دائرة ثلاثة امثالها فطريقة ذلك ان يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز دَ للدائرة المطلوبة وبالرمز نقَ لنصف قطرها فاعلى منطوق المثال يكون
دَ = ٣ د وحيث ان د = ط نق٢ و دَ = ط نقَ٢
يكون ط نقَ٢ = ٣ ط نق٢ ومن هذه المساواة ينتج ان نقَ٢ = ٣ نق٢
اعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة ثلاثة امثال مربع نصف قطر

اذا علم محيط مثل م وكان المطلوب ايجاد محيط آخر يساوي المحيط المعلوم

مضروبا في كمية معينة مثل ك

فطريقة ذلك ان يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز مَ

للمحيط المطلوب وبالرمز نقَ لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

مَ = م × ك وحيث ان م = ٢ ط نق و مَ = ٢ ط نقَ

فيكون ٢ ط نقَ = ٢ ط نق × ك

ومن هذه المتساوية ينتج ان نقَ = نق × ك

اعني ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوي نصف قطر المحيط المعلوم مضروبا

في الكمية التي يراد ضرب المحيط المعلوم فيها

المثال الرابع

اذا علم محيط مثل م وكان المطلوب ايجاد محيط آخر يساوي المحيط المعلوم

مقسوما على كمية معينة مثل ك

فطريقة ذلك ان يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز مَ

للمحيط المطلوب وبالرمز نقَ لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

مَ = $\frac{م}{ك}$ وحيث ان م = ٢ ط نق و مَ = ٢ ط نقَ

فيكون ٢ ط نقَ = ٢ ط $\frac{نق}{ك}$ = ٢ ط × $\frac{نق}{ك}$

ومن هذه المتساوية ينتج ان نقَ = $\frac{نق}{ك}$

اعني ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوي نصف قطر المحيط المعلوم مقسوما

على الكمية التي يراد قسمة المحيط المعلوم عليها

المثال الخامس

ان يكون المطلوب انشاء محيط نسبته الى محيط معلوم كنسبة ٣ الى ٥

طريقة ذلك ان يرمز بالرمز م للمحيط المعلوم وبالرمز نق لنصف قطره

وبالرمز مَ للمحيط المطلوب وبالرمز نقَ لنصف قطره فعلى منطوق

المثال

اعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوي مربع نصف قطر الدائرة المعلومة مقسوما على الكمية التي يراد تقسيم الدائرة المعلومة عليها

المثال الخامس

ان يكون المطلوب انشاء دائرة نسبتها الى دائرة معلومة كنسبة ٣ الى ٥

طريقة ذلك ان يرمز بالحرف د للدائرة المعلومة وبالرمز نق لنصف قطرها وبالرمز دَ للدائرة المطلوبة وبالرمز نقَ لنصف قطرها وعلى منطوق المثال يكون

دَ : د :: ٣ : ٥

وحيث ان

دَ : د :: نقَ٢ : نق٢

يكون

نقَ٢ : نق٢ :: ٣ : ٥

ومن هذه المناسبة ينتج ان

نقَ٢ = نق٢ × ٣/٥

اعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوي ثلاثة اخماس مربع نصف قطر الدائرة المعلومة

الدائرة المعلومة

المثال الثالث

اذا علمت دائرة مثل ى وكان المطلوب ايجاد دائرة أخرى تساوى الدائرة المعلومة مضروبة فى كمية معينة مثل ں

فطريقة ذلك ان يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز ىَ للدائرة المطلوبة وبالرمز نقَ لنصف قطرها وعلى منطوق المثال يكون

$\text{ىَ} = \text{ى} \times \text{ں}$ وحيث ان $\text{ى} = \text{ط نق}^{٢}$ و $\text{ىَ} = \text{ط نقَ}^{٢}$

يكون $\text{ط نقَ}^{٢} = \text{ط نق}^{٢} \times \text{ں}$ ومن هذه المتساوية ينتج ان

$$\text{نقَ}^{٢} = \text{نق}^{٢} \times \text{ں}$$

اعنى ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى مربع نصف قطر الدائرة المعلومة مضروبا فى الكمية التى يراد ضرب الدائرة المعلومة فيها

المثال الرابع

اذا علمت دائرة مثل ى وكان المطلوب ايجاد دائرة أخرى تساوى الدائرة المعلومة مقسومة على كمية معينة مثل ں

فطريقة ذلك ان يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز ىَ للدائرة المطلوبة وبالرمز نقَ لنصف قطرها وعلى منطوق المثال يكون

$\text{ىَ} = \frac{\text{ى}}{\text{ں}}$ وحيث ان

$\text{ى} = \text{ط نق}^{٢}$ و $\text{ىَ} = \text{ط نقَ}^{٢}$ يكون

$\text{ط نقَ}^{٢} = \text{ط} \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ں}} = \text{ط} \times \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ں}}$ ومن هذه المتساوية ينتج ان

$$\text{نقَ}^{٢} = \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ں}}$$

اعنى



وقد تم طبع الجزء الاول من التحفة العربية في تهذيب الاصول الهندسية
بدار الطباعة العامرة المنشأة ببولاق مصر القاهرة في ايام دولة
صاحب الرأي السديد حضرة افندينا ولي النعم محمد السعيد
ووافق تمام طبعه تحت ملاحظة ناظر المطبعة العامرة
المذكورة ذات المناقب المشهوره حضرة علي
افندي جودة بلغه الله مأموله وقصده في الخامس
والعشرين من رجب الفرد سنة ١٢٧٤ الف
ومائتين واربعة وسبعين من الهجرة
النبوية على صاحبها أفضل
الصلاة وازكى
التحية

وقد أرخ تمام طبع هذا الجزء الكثير الفوائد المشتمل في بابه على نفيس الدرر والفرائد راجي توفيق المعيد المبدي الشيخ صالح أفندي مجدي مترجم الكتب العسكرية وناظم عقودها الجوهرية وصرح فيه بمدح ولي النعم ذوي الحمد والبر الشامل والكرم فقال

شرفت لمصر بدولة الانصاف * ذات العلا والحزم والاسعاف
وبصدرها الشهم السعيد محمد * قطب المعارف مركز الالطاف
يحيي العلوم بنشرها في عصره * ويجيرها من آفة الاتلاف
لم لا وقد احيت أوامره لنا * كتبا بتمثيل بديع واف
منها الاصول الهندسية اذ بها * عرف المهندس كل سر خاف
وتمثلت طبعا فقلت مؤرخا * يسقي المهندس من كتاب شاف

٣٩١ ٤٢٣ ٩ ١٩٠ ١٨٠

سنة ١٢٧٤